Глава 1

Основные понятия

1.1. Понятия о дифференциальных уравнениях

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные неизвестной функции. Приведем некоторые примеры.

Пример 1.1.1. *Найти функцию $y(t)$ такую, что*

$$y'''(t) + (y'(t))^2 - e^t y(t) = 1 + t, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Пример 1.1.2. *Найти функцию $u(t,x)$ такую, что*

$$u_{tt}(t,x) + u_t(t,x) = (t^2 + x)u(t,x), \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad c \leqslant x \leqslant d.$$

Пример 1.1.3. *Найти функцию $u(t,x)$ такую, что*

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x) = 0, \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad c \leqslant x \leqslant d.$$

Уравнение, содержащее производные неизвестной функции только по одной независимой переменной, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Уравнение, содержащее производные неизвестной функции по нескольким независимым переменным, называется дифференциальным уравнением *в частных производных.*

Уравнения, приведенные в примерах 1.1.1 и 1.1.2, являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнение из примера 1.1.3 – дифференциальным уравнением в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называется наибольший порядок входящих в него производных.

Данный курс посвящен, в основном, обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно неизвестной функции $y(t)$ называется уравнение

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad t \in [a,b],$$

где $F(t,y,p)$ – заданная функция трех переменных.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка относительно неизвестной функции $y(t)$ называется уравнение

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad t \in [a,b],$$

где $F(t, y, p_1, \dots, p_n)$ – заданная функция $n+2$ переменных.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной, называется уравнение

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad t \in [a,b], \tag{1.1}$$

где $F(t, y, p_1, \dots, p_{n-1})$ – заданная функция $n+1$ переменной.

Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями можно рассматривать системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть заданы функции $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$ называется система

$$\begin{cases} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad t \in [a,b], \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad t \in [a,b], \\ \dots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad t \in [a,b]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) может быть сведено к нормальной системе (1.2). Действительно, пусть функция $y(t)$ является решением уравнения (1.1). Введем функции

$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \quad \dots \quad y_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t), \quad y_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Тогда функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ являются решениями нормальной системы

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t), & t \in [a,b], \\ y_2'(t) &= y_3(t), & t \in [a,b], \\ & \dots \\ y_{n-1}'(t) &= y_n(t), & t \in [a,b], \\ y_n'(t) &= F(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), & t \in [a,b]. \end{cases} \tag{1.3}$$

Справедливо и обратное. Если функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ являются решениями системы (1.3), то функция $y(t) = y_1(t)$ является решением уравнения (1.1).

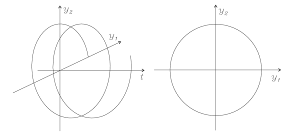


Рис. 1.1. К примеру 1.1.4: слева – интегральная кривая (спираль), справа – фазовая траектория (окружность).

При решении уравнения (1.1) или системы (1.2) часто приходится проводить операцию интегрирования. Процесс нахождения решений обычно называется *интегрированием* дифференциального уравнения или системы.

Всякое решение $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ системы (1.2) можно интерпретировать геометрически как кривую в $n+1$ мерном пространстве переменных $(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Кривая $(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ называется *интегральной кривой.* Пространство переменных $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется фазовым пространством, а определенная в этом пространстве кривая $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ – *фазовой траекторией.*

Пример 1.1.4. *Нормальная система*

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t), & t \in [0, 4\pi], \\ y_2'(t) = y_1(t), & t \in [0, 4\pi] \end{cases}$$

имеет решение $y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = \sin t$. Интегральная кривая этого решения в пространстве переменных (t, y_1, y_2) является спиралью, состоящей из двух витков, а фазовая траектория – окружностью (см. рис. 1.1).

1.2. Некоторые математические модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

Обыкновенные дифференциальные уравнения являются основой математических моделей разнообразных процессов и явлений. Приведем некоторые примеры подобных математических моделей.

1.2.1. Движение материальной точки

Рассмотрим процесс движения материальной точки с единичной массой вдоль прямой, которую будем считать осью x. Движение точки обусловлено тем, что на нее действует сила $f(t)$, зависящая от времени t. Обозначим положение точки в момент времени t через $x(t)$. В соответствии с вторым законом Ньютона получим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t). \tag{1.4}$$

Таким образом, при заданной функции $f(t)$ движение точки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$.

Решение уравнения (1.4) может быть легко найдено в результате двукратного интегрирования

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{\tau} f(\theta) d\theta d\tau + c_1 + c_2 t, \tag{1.5}$$

где t_0 - некоторое заданное число, а c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Из формулы (1.5) следует, что уравнение (1.4) не определяет однозначно процесс движения $x(t)$. Это легко понять и из физических соображений. Действительно, для однозначного определения положения точки $x(t)$ нужно знать её положение в некоторый момент времени t_0, то есть величину $x_0 = x(t_0)$ и ее скорость $v_0 = x'(t_0)$. В этом случае $c_1 = x_0$, $c_2 = v_0$ и положение точки $x(t)$ в любой момент времени определяется однозначно.

Уравнение (1.4) определяет простейший вариант движения точки вдоль прямой. Если сила, действующая на точку, зависит не только от времени, но также и от положения точки $x(t)$ и её скорости $x'(t)$, то обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее положение точки $x(t)$, будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x(t), x'(t)),$$

где $f(t,x,p)$ – заданная функция трех переменных.

Рассмотрим теперь процесс движения материальной точки единичной массы в пространстве. Положение точки задается радиус-вектором $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Движение точки обусловлено действием на нее силы, зависящей от времени, положения точки и ее скорости. Эта сила описывается вектор-функцией

$$\bar{f}(t, \bar{r}(t), \bar{r}'(t)) = (f_1(t, \bar{r}(t), \bar{r}'(t)), f_2(t, \bar{r}(t), \bar{r}'(t)), f_3(t, \bar{r}(t), \bar{r}'(t))).$$

Второй закон Ньютона дает уравнение для описания траектории $\bar{r}(t)$ движения точки

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{f}(t, \bar{r}(t), \bar{r}'(t)).$$

Записывая это векторное уравнение по компонентам, мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t), y(t), z(t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = f_2(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = f_3(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),$$

где $f_i(t, x, y, z, u, v, w)$, $i = 1, 2, 3$ – заданные функции семи переменных. Эта система не является нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако ее можно привести к нормальному виду введя дополнительные неизвестные функции

$$u(t) = x'(t), \quad v(t) = y'(t), \quad w(t) = z'(t).$$

В результате мы получим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$

$$\begin{aligned} x'(t) &= u(t), \\ y'(t) &= v(t), \\ z'(t) &= w(t), \\ u'(t) &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)), \\ v'(t) &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)), \\ w'(t) &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)). \end{aligned}$$

Очевидно, что для однозначного определения траектории точки в пространстве следует задать ее положение в некоторый момент времени t_0 и её скорость в этот же момент времени, то есть значения $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$, $u(t_0)$, $v(t_0)$ $w(t_0)$.

1.2.2. Модели динамики популяций

Модели динамики популяций описывают процессы изменения численности биологических объектов во времени. Приведем простые примеры подобных моделей.

Рассмотрим популяцию некоторых биологических организмов. Обозначим их количество, нормированное относительно некоторого достаточно большого значения, в момент времени t через $u(t)$. Далее будем считать функцию $u(t)$ непрерывно дифференцируемой и предположим, что изменение количества организмов происходит за счет рождения и смерти. Если скорость рождаемости и скорость смертности пропорциональны количеству организмов $u(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = au(t) - bu(t), \tag{1.6}$$

где a – постоянный коэффициент рождаемости, а b – постоянный коэффициент смертности организмов. Таким образом, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u(t)$. Решениями уравнения (1.6) являются функции

$$u(t) = C \exp\{(a-b)t\},$$

где C – произвольная постоянная. Для устранения подобной неоднозначности нужно знать количество организмов в некоторый момент времени, то есть величину $u_0 = u(t_0)$. В этом случае решение уравнения (1.6) определяется однозначно и имеет вид

$$u(t) = u_0 \exp\{(a-b)(t-t_0)\}.$$

Рассмотрим теперь более сложную модель динамики популяций, которая описывает изменение численности биологических объектов двух видов: жертв и хищников. Обозначим количество жертв через $u(t)$, а количество хищников через $v(t)$. Различие в изменении количества жертв и хищников состоит в том, что жертвы являются кормом для хищников, а хищники не являются кормом для жертв. В связи с этим считаем, что скорость рождения жертв пропорциональна их количеству, а скорость их смертности пропорциональна произведению количества жертв на количество хищников. В результате мы получим следующую формулу для изменения количества жертв: $u'(t) = au(t) - bu(t)v(t)$, где a и b – постоянные положительные коэффициенты. С другой стороны, скорость рождаемости хищников зависит как от их количества, так и от количества корма, а скорость смертности зависит только от количества хищников. Эти предположения можно описать следующей формулой для изменения количества хищников: $v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t)$, где c и d – постоянные положительные коэффициенты. Таким образом, мы получили следующую нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций $u(t)$ и $v(t)$

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)v(t), \\ v'(t) &= cu(t)v(t) - dv(t). \end{aligned}$$

Для однозначного определения количества жертв и хищников кроме этих уравнений нужно задать в некоторый момент времени t_0 количество жертв $u_0 = u(t_0)$ и количество хищников $v_0 = v(t_0)$.

1.3. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{1.7}$$

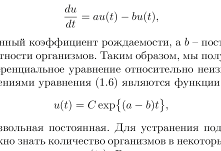


Рис. 1.2. Геометрический смысл уравнения $y'(t) = f(t, y(t))$.

где функция $f(t,y)$ определена и непрерывна в некоторой области D на плоскости переменных (t,y).

Определим понятие решения уравнения (1.7).

Определение 1.3.1. *Функция $y(t)$ называется решением уравнения (1.7) на отрезке $[a,b]$, если:*

1. $y(t) \in C^1[a,b]$;
2. $(t, y(t)) \in D$ *для всех* $t \in [a,b]$;
3. $y'(t) = f(t, y(t))$ *для всех* $t \in [a,b]$.

Здесь и далее в тексте $C^n[a,b]$ при $n \in \mathbb{N}$ обозначает множество n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций, а $C[a,b]$ — множество непрерывных на этом отрезке функций.

Пусть $y(t)$ – решение уравнения (1.7) на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим на плоскости множество точек $(t, y(t))$, $t \in [a,b]$. Это множество представляет собой интегральную кривую. Из определения решения следует, что в каждой точке интегральной кривой существует касательная. Направляющий вектор касательной к интегральной кривой в точке $(t_0, y(t_0))$ равен $(1, f(t_0, y(t_0)))$ (см. рис. 1.2).

При интегрировании уравнения (1.7) могут получаться решения как в виде зависящего от параметра C семейства функций $y(t,C)$, так и отдельные решения, не входящие в эти семейства.

Пример 1.3.1. *Рассмотрим уравнение*

$$y'(t) = \sqrt[3]{y^2(t)}. \tag{1.8}$$

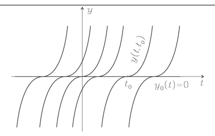


Рис. 1.3. Пример особого решения $y_0(t) = 0$.

Его решениями являются семейство функций

$$y(t) = \frac{(t-C)^3}{27}, \tag{1.9}$$

где C – произвольная постоянная. Также решением уравнения (1.8) является $y_0(t) = 0$. Очевидно, что это решение не может быть получено из семейства (1.9) ни при каком выборе постоянной C.

Решение дифференциального уравнения (1.7) называется *частным* решением, если во всех точках его интегральной кривой выполняется условие единственности, то есть ее не касаются другие интегральные кривые уравнения (1.7).

Решение называется *особым*, если в каждой точке его интегральной кривой происходит ее касание с другими интегральными кривыми.

В примере 1.3.1 решение $y_0(t) = 0$ является особым решением, так как в каждой точке $(t_0, 0)$ его интегральной кривой ее касается интегральная кривая, соответствующая решению $y(t, t_0) = \dfrac{(t-t_0)^3}{27}$ (см. рис. 1.3).

1.4. Дифференциальные уравнения в симметричном виде и в полных дифференциалах

Исследование дифференциальных уравнений первого порядка в разрешенном относительно производной виде вносит несимметричность в

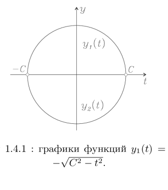


Рис. 1.4. К примеру 1.4.1 : графики функций $y_1(t) = \sqrt{C^2 - t^2}$ и $y_2(t) = -\sqrt{C^2 - t^2}$.

переменные t и y, поскольку подразумевает, что y есть функция от t. С точки зрения интегральных кривых, представляющих собой графики решений дифференциальных уравнений, нет особой разницы в выборе способа параметризации. То есть, наряду с $y = y(t)$, возможно $t = t(y)$ или, в общем случае, $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, где τ – параметр.

Целесообразность выбора симметричной параметризации показывает следующий пример.

Пример 1.4.1. *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$y'(t) = -\frac{t}{y(t)}. \tag{1.10}$$

Его решениями на отрезке $[-C + \varepsilon, C - \varepsilon]$ при $0 < \varepsilon < C$ являются функции

$$y_1(t) = \sqrt{C^2 - t^2}, \quad y_2(t) = -\sqrt{C^2 - t^2}.$$

Очевидно, что оба этих решения не существуют на отрезке $[-C, C]$, поскольку при $t \to C$ и $t \to -C$ производные решений стремятся к бесконечности. Интегральная кривая $(t, y_1(t))$ представляет собой верхнюю полуокружность, а интегральная кривая $(t, y_2(t))$ – нижнюю полуокружность (см. рис. 1.4). Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.10) определяют окружность радиуса C за исключением точек $(-C, 0)$, $(C, 0)$. Эта особенность связана только с тем, что при определении решения мы использовали параметризацию $y = y(t)$. Устранить этот недостаток можно, перейдя к более общей форме дифференциального уравнения первого порядка.

1.4.1. Уравнение в симметричном виде

Дифференциальным уравнением в симметричном виде (или в дифференциалах) называется уравнение

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0. \tag{1.11}$$

Предполагается, что функции $M(t,y)$ и $N(t,y)$ определены и непрерывны в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и подчиняются условию

$$|M(t,y)| + |N(t,y)| > 0, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.12}$$

Уравнение (1.11) является более общим по сравнению с уравнением (1.7), поскольку последнее уравнение можно записать в виде (1.11) с функциями $M(t,y) = f(t,y)$, $N(t,y) = -1$.

Дадим определение решения уравнения (1.11). Так как переменные входят в него симметрично, то определение решения естественно дать в параметрической форме.

Определение 1.4.1. *Пара функций $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ называется параметрическим решением уравнения в симметричном виде (1.11) на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, если:*

1. *функции $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ непрерывно дифференцируемы на $[\tau_1, \tau_2]$ и* $|\varphi'(\tau)| + |\psi'(\tau)| > 0$, $\forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$;
2. $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D$, $\forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$;
3. *при подстановке $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ в (1.11) получается тождество, то есть*

$$M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{1.13}$$

Пусть $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ – параметрическое решение уравнения (1.11). Интегральной кривой уравнения в симметричной форме называется совокупность точек на плоскости (t,y) таких, что $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Из условия 1 в определении параметрического решения вытекает, что либо $\varphi'(\tau) \neq 0$, либо $\psi'(\tau) \neq 0$ в окрестности каждой точки $\tau_0 \in (\tau_1, \tau_2)$. Это, в свою очередь, означает существование одной из обратных функций $\tau = \varphi^{-1}(t)$ либо $\tau = \psi^{-1}(y)$ и, соответственно, возможность представить решение уравнения (1.11) либо в виде $y = \psi(\varphi^{-1}(t))$ в окрестности точки $t_0 = \varphi(\tau_0)$, либо в виде $t = \varphi(\psi^{-1}(y))$ в окрестности точки $y_0 = \psi(\tau_0)$.

Убедимся в преимуществе исследования уравнения в симметричной форме на примере уравнения (1.10).

Пример 1.4.2. *Запишем уравнение (1.10) в симметричном виде*

$$tdt + ydy = 0.$$

Его параметрическое решение $t = C\cos\tau$, $y = C\sin\tau$, $\tau \in [0, 2\pi]$ определяет интегральные кривые, представляющие собой окружности радиуса C. То есть, в отличие от интегральных кривых уравнения (1.10), параметрическое решение задает окружность целиком без каких-либо исключенных точек.

Заметим, что, если параметрическое решение рассматривается отрезке $\tau \in [0, 2\pi]$, то не существует однозначной функции $y = y(t)$ или $t = t(y)$, описывающей соответствующую дугу целиком. В то же время, в окрестности каждой точки рассматриваемой дуги такие представления нетрудно выписать.

С уравнением в симметричной форме связаны важные понятия *интеграла* и *общего интеграла.* Пусть функция $\Phi(t, y, c)$ определена и непрерывна для $(t,y) \in D$ и постоянных c, принадлежащих некоторому множеству C_0.

Определение 1.4.2. *Уравнение*

$$\Phi(t, y, c) = 0$$

называется интегралом уравнения (1.11) в области D, если при любом значении $c \in C_0$ оно определяет решение уравнения (1.11).

Интеграл называется общим, если он определяет <u>все</u> решения уравнения (1.11), то есть для любого решения уравнения (1.11) $t = \varphi(\tau), y = \psi(\tau)$, интегральная кривая которого лежит в D, найдется постоянная $\tilde{c} \in C_0$ такая, что $\Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau), \tilde{c}) \equiv 0$.

Так как общий интеграл определяет все решения дифференциального уравнения, то в том случае, когда его удается найти, задача поиска решений дифференциального уравнения считается решенной. Рассмотрим примеры.

Пример 1.4.3. *Уравнение в симметричной форме $tdt + ydy = 0$ имеет общий интеграл $t^2 + y^2 - c = 0$. Множество C_0 в этом случае является множеством положительных чисел.*

Пример 1.4.4. *Для дифференциального уравнения $y'(t) = \sqrt[3]{y^2(t)}$ из примера 1.3.1 общий интеграл в произвольной области, целиком лежащей в полуплоскости $y > 0$, имеет вид*

$$y - \frac{(t-C)^3}{27} = 0.$$

На всей же плоскости $\mathbb{R}^2$ это уравнение является интегралом, но не является общим интегралом, поскольку решение $y_0(t) \equiv 0$ не может быть получено из данного уравнения ни при каком значении константы C.

1.4.2. Уравнение в полных дифференциалах

Наиболее просто интегрируются дифференциальные уравнения в симметричном виде, левая часть которых представляет собой полный дифференциал некоторой функции.

Определение 1.4.3. *Дифференциальное уравнение в симметричном виде (1.11) называется уравнением в полных дифференциалах в области D, если существует непрерывно дифференцируемая в D функция $V(t,y)$ такая, что $\left|\dfrac{\partial V(t,y)}{\partial t}\right| + \left|\dfrac{\partial V(t,y)}{\partial y}\right| > 0$ и*

$$M(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial t}, \quad N(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial y}, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.14}$$

Теорема 1.4.1. *Уравнение в полных дифференциалах вида (1.11) имеет в области D общий интеграл*

$$V(t,y) = C. \tag{1.15}$$

Доказательство. Согласно определению общего интеграла 1.4.2 проверим сначала, что уравнение (1.15) является интегралом. Рассмотрим уравнение (1.15) в окрестности произвольной точки $(t_0, y_0) \in D$ и положим $C_0 = V(t_0, y_0)$. Из условия (1.12) и представления (1.14) имеем:

$$\text{либо} \quad \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial t} = M(t_0, y_0) \neq 0, \quad \text{либо} \quad \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial y} = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Пусть для определенности справедливо второе из выписанных неравенств. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки t_0 существует *единственная* непрерывно дифференцируемая функция $y = g(t)$ такая, что $y_0 = g(t_0)$ и

$$V(t, g(t)) = C_0 \tag{1.16}$$

в рассматриваемой окрестности. Если теперь взять дифференциалы левой и правой частей равенства (1.16), то

$$dC_0 = 0 = dV(t, g(t)) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, g(t))}{\partial y} dg(t) = \\ = M(t, g(t))dt + N(t, g(t))g'(t)dt,$$

то есть $t = t$ и $y = g(t)$ является параметрическим решением уравнения (1.11). Следовательно, уравнение (1.15) является интегралом дифференциального уравнения (1.11).

Покажем, что уравнение (1.15) является общим интегралом дифференциального уравнения (1.11). Пусть $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ – произвольное решение (1.11) такое, что $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. Покажем, что найдется постоянная C такая, что

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Из условия 1.14 для всех $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ имеем

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau).$$

Так как $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ – параметрическое решение (1.11), то выполнено уравнение (1.13), а значит

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Следовательно,

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2],$$

и уравнение (1.15) – общий интеграл дифференциального уравнения (1.11). □

Замечание 1.4.1. *Из доказательства теоремы 1.4.1 следует, что через любую точку $(t_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая уравнения в полных дифференциалах (1.11), (1.14).*

Замечание 1.4.2. *Если ввести векторное поле*

$$\overline{a}(t,y) = (M(t,y), N(t,y)),$$

то условие (1.14) будет означать потенциальность *этого поля:*

$$\overline{a}(t,y) = \mathrm{grad} V(t,y).$$

Критерий того, что уравнение (1.11) является уравнением в полных дифференциалах, дается следующей теоремой.

Теорема 1.4.2. *Пусть функции $M(t,y)$, $N(t,y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в прямоугольнике D со сторонами, параллельными координатным осям, и выполнено условие (1.12). Тогда для того, чтобы уравнение (1.11) было уравнением в полных дифференциалах в D, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.17}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть уравнение (1.11) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда существует функция $V(t,y)$ такая, что выполнены равенства (1.14). Дифференцируя первое из них по y, а второе по t, получим равенства

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial t \partial y}, \quad \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y \partial t},$$

из которых следует (1.17).

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (1.17). Рассмотрим функцию

$$V(t,y) = \int\limits_{t_0}^{t} M(\xi, y) d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} N(t_0, \eta) d\eta,$$

где (t_0, y_0) – фиксированная точка прямоугольника D. Дифференцируя по t, получим $\dfrac{\partial V(t,y)}{\partial t} = M(t,y)$. Дифференцируя по y и учитывая условие (1.17), имеем

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial M(\xi, y)}{\partial y} d\xi + N(t_0, y) = \\ = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial t} d\xi + N(t_0, y) = N(t,y).$$

Следовательно, $V(t,y)$ удовлетворяет определению 1.4.3 и уравнение (1.11) является уравнением в полных дифференциалах.

1.4.3. Интегрирующий множитель

Определение 1.4.4. *Непрерывно дифференцируемая в области D функция $\mu = \mu(t,y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем, если уравнение*

$$\mu(t,y)M(t,y)dt + \mu(t,y)N(t,y)dy = 0 \tag{1.18}$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Теорема 1.4.3. *Пусть уравнение $Mdt + Ndy = 0$ имеет в области D общий интеграл $\Phi(t,y) = C$, причем функция $\Phi(t,y)$ непрерывно дифференцируема в D и выполнено неравенство*

$$\left|\frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial y}\right| > 0, \quad \forall (t,y) \in D.$$

Тогда существует интегрирующий множитель в D.

Доказательство. В силу замечания 1.4.1 из теоремы 1.4.1 через любую точку области D проходит единственная интегральная кривая. Пусть $(\varphi(\tau), \psi(\tau))$ – соответствующее параметрическое решение. По определению общего интеграла $\Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \equiv C$. После вычисления дифференциала имеем

$$0 = dC = \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\varphi'(\tau) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\psi'(\tau)\Big)d\tau.$$

В тоже время, из определения параметрического решения (1.13):

$$M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau) = 0, \quad |\varphi'(\tau)| + |\psi'(\tau)| > 0.$$

Таким образом, система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial t} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'(\tau) \\ \psi'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеет нетривиальное решение. Это возможно только в случае равенства нулю определителя матрицы, то есть

$$N\frac{\partial\Phi}{\partial t} \equiv M\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Заметим, что, если в какой-либо точке $M = 0$, то $N \neq 0$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \neq 0$. Поэтому можно положить

$$\mu(t,y) = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}(t,y)}{M(t,y)} \equiv \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(t,y)}{N(t,y)} \neq 0.$$

Поскольку по построению

$$\mu M = \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad \mu N = \frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

то $\mu(t,y)$ является интегрирующим множителем, причем (1.18) является уравнением в полных дифференциалах с функцией $V = \Phi(t,y)$. □

Замечание 1.4.3. *Интегрирующий множитель определяется неоднозначно. Действительно, если $\mu(t,y)$ является интегрирующим множителем, то найдется непрерывно дифференцируемая функция $V(t,y)$ такая, что справедливо равенство $dV = \mu M dt + \mu N dy$. Умножая это равенство на $f(V)$, где $f(s)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция скалярного аргумента, $f(s) \neq 0$, получаем*

$$f(V)dV = d\Big(\int f(V)dV\Big) = \mu f(V)Mdt + \mu f(V)Ndy.$$

Поэтому $\mu_1(t,y) = \mu(t,y)f(V(t,y))$ – также интегрирующий множитель.

Отметим, что (1.18) является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(t,y)M(t,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mu(t,y)N(t,y)\Big),$$

которое можно рассматривать в качестве уравнения для нахождения интегрирующего множителя. После приведения подобных слагаемых имеем

$$N\frac{\partial\mu}{\partial t} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right). \tag{1.19}$$

Это уравнение в частных производных. В общем случае оно сложнее исходного уравнения в симметричном виде, и решать его невыгодно. Тем не менее, в ряде случаев (1.19) можно использовать для нахождения интегрирующего множителя.

1. Если $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}\right) = g(t)$ – функция только аргумента t, то интегрирующий множитель можно искать в виде $\mu = \mu(t)$. Уравнение (1.19) принимает вид $\mu'(t) = \mu(t)g(t)$ и имеет решение

$$\mu(t) = \exp\{\textstyle\int g(t)dt\}.$$

2. Если $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}\right) = h(y)$ – функция только аргумента y, то интегрирующий множитель можно искать в виде $\mu = \mu(y)$. Уравнение (1.19) принимает вид $\mu'(y) = -\mu(y)h(y)$ и имеет решение

$$\mu(y) = \exp\{-\textstyle\int h(y)dy\}.$$

Глава 2

Задача Коши

2.1. Задача Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

Пусть функция $f(t,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = \{(t,y): \quad |t-t_0| \leqslant T, \quad |y-y_0| \leqslant A\}.$$

Рассмотрим на отрезке $[t_0-T, t_0+T]$ дифференциальное уравнение

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{2.1}$$

с условием

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.2}$$

Требуется определить функцию $y(t)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) и условию (2.2). Эта задача называется задачей с начальным условием или задачей Коши.

Рассмотрим отрезок $[t_1,t_2]$ такой, что $t_0 - T \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_0 + T$, $t_0 \in [t_1,t_2]$.

Определение 2.1.1. *Функция $\bar{y}(t)$ называется решением задачи Коши (2.1), (2.2) на отрезке $[t_1,t_2]$, если: $\bar{y}(t) \in C^1[t_1,t_2]$, $|\bar{y}(t)-y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1,t_2]$, $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) для $t \in [t_1,t_2]$ и условию (2.2).*

2.1.1. Редукция к интегральному уравнению

Покажем, что решение задачи с начальным условием (2.1), (2.2) эквивалентно решению некоторого интегрального уравнения.

Рассмотрим на отрезке $[t_0-T, t_0+T]$ уравнение относительно неизвестной функции $y(t)$

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau. \tag{2.3}$$

Такое уравнение называется интегральным, поскольку неизвестная функция $y(t)$ входит под знак интеграла.

Лемма 2.1.1. *Функция $\bar{y}(t)$ является решением задачи Коши (2.1), (2.2) на отрезке $[t_1,t_2]$ тогда и только тогда, когда $\bar{y}(t) \in C[t_1,t_2]$, $|\bar{y}(t)-y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1,t_2]$ и $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) для $t \in [t_1,t_2]$.*

Доказательство. Пусть функция $\bar{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (2.1), (2.2) на отрезке $[t_1,t_2]$. Из определения 2.1.1 следует, что $\bar{y}(t) \in C[t_1,t_2]$, $|\bar{y}(t)-y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1,t_2]$. Покажем, что $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) для $t \in [t_1,t_2]$. Интегрируя уравнение (2.1) от t_0 до t, получим

$$\int\limits_{t_0}^{t} \bar{y}'(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1,t_2].$$

Учитывая начальное условие (2.2), имеем

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1,t_2].$$

Следовательно, функция $\bar{y}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.3) при $t \in [t_1,t_2]$.

Пусть функция $\bar{y}(t)$ такова, что $\bar{y}(t) \in C[t_1,t_2]$, $|\bar{y}(t)-y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1,t_2]$ и $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) для $t \in [t_1,t_2]$, то есть

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1,t_2]. \tag{2.4}$$

Покажем, что $\bar{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (2.1), (2.2).

Положив в (2.4) $t = t_0$, получим, что $\bar{y}(0) = y_0$. Следовательно условие (2.2) выполнено. Так как функция $\bar{y}(t)$ непрерывна на $[t_1,t_2]$, то правая часть равенства

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau))d\tau$$

непрерывно дифференцируема на $[t_1,t_2]$ как интеграл с переменным верхним пределом t от непрерывной функции $f(\tau,\bar{y}(\tau)) \in C[t_1,t_2]$. Следовательно, $\bar{y}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1,t_2]$. Дифференцируя (2.4), получим, что $\bar{y}(t)$ удовлетворяет (2.1), и лемма 2.1.1 доказана. □

2.1.2. Лемма Гронуолла-Беллмана

Докажем единственность решения задачи Коши (2.1), (2.2). Для этого нам потребуется следующая лемма, обычно называемая леммой Гронуолла-Беллмана.

Лемма 2.1.2. *Пусть функция $z(t) \in C[a,b]$ и такова, что*

$$0 \leqslant z(t) \leqslant c + d\left|\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|, \quad t \in [a,b], \tag{2.5}$$

где постоянная c неотрицательна, постоянная d положительна, а t_0 – произвольное фиксированное число на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$z(t) \leqslant ce^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a,b]. \tag{2.6}$$

Доказательство. Рассмотрим $t \geqslant t_0$. Введем функцию

$$p(t) = \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0,b].$$

Тогда $p'(t) = z(t) \geqslant 0$, $p(t_0) = 0$. Из (2.5) следует, что $p'(t) \leqslant c + dp(t)$, $t \in [t_0,b]$. Умножив это неравенство на $e^{-d(t-t_0)}$, получим

$$p'(t)e^{-d(t-t_0)} \leqslant ce^{-d(t-t_0)} + dp(t)e^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0,b].$$

Это неравенство можно переписать так

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)e^{-d(t-t_0)}\right) \leqslant ce^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0,b].$$

Проинтегрировав от t_0 до t , получим

$$p(t)e^{-d(t-t_0)} - p(t_0) \leqslant c\int\limits_{t_0}^{t} e^{-d(\tau-t_0)}d\tau = \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t-t_0)}\right), \quad t \in [t_0,b].$$

Учитывая то, что $p(t_0) = 0$, имеем $dp(t) \leqslant ce^{d(t-t_0)} - c$. Следовательно,

$$z(t) \leqslant c + dp(t) \leqslant c + ce^{d(t-t_0)} - c = ce^{d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0,b]$$

и неравенство (2.6) для $t \in [t_0,b]$ доказано.

Докажем неравенство (2.6) для $t \in [a,t_0]$. Перепишем неравенство (2.5) следующим образом

$$0 \leqslant z(t) \leqslant c - d\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau = c + d\int\limits_{t}^{t_0} z(\tau)d\tau, \quad t \in [a,t_0].$$

Обозначим

$$q(t) = \int\limits_{t}^{t_0} z(\tau)d\tau, \quad t \in [a,t_0].$$

Тогда $q'(t) = -z(t) \leqslant 0$, $q(t_0) = 0$. Из неравенства (2.5) следует, что $-q'(t) \leqslant c + dq(t)$, $t \in [a,t_0]$. Умножив это неравенство на $e^{-d(t_0-t)}$, получим

$$-q'(t)e^{-d(t_0-t)} \leqslant ce^{-d(t_0-t)} + dq(t)e^{-d(t_0-t)}, \quad t \in [a,t_0].$$

Это неравенство можно переписать так

$$-\frac{d}{dt}\left(q(t)e^{-d(t_0-t)}\right) \leqslant ce^{-d(t_0-t)}, \quad t \in [a,t_0].$$

Проинтегрировав от t до t_0 , получим

$$q(t)e^{-d(t_0-t)} - q(t_0) \leqslant c\int\limits_{t}^{t_0} e^{-d(t_0-\tau)}d\tau = \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t_0-t)}\right), \quad t \in [a,t_0].$$

Следовательно, $dq(t) \leqslant ce^{d(t_0-t)} - c$. А значит

$$z(t) \leqslant c + dq(t) \leqslant c + ce^{d(t_0-t)} - c = ce^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a,t_0]$$

и неравенство (2.6) для $t \in [a,t_0]$ доказано, что и завершает доказательство леммы 2.1.2. □

2.1.3. Условие Липшица

Сформулируем теперь важное для дальнейших исследований условие Липшица.

Определение 2.1.2. *Функция $f(t,y)$, заданная в прямоугольнике Π, удовлетворяет в Π условию Липшица по y, если*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leqslant L|y_1-y_2|, \quad \forall (t,y_1),(t,y_2) \in \Pi,$$

где L – положительная постоянная.

Замечание 2.1.1. *Если функции $f(t,y)$ и $f_y(t,y)$ определены и непрерывны в Π, то $f(t,y)$ удовлетворяет в Π условию Липшица по y. Действительно, так как $f_y(t,y)$ непрерывна в Π, то найдется положительная константа L такая, что*

$$|f_y(t,y)| \leqslant L, \quad \forall (t,y) \in \Pi.$$

Тогда из формулы Лагранжа следует, что

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |f_y(t,\theta)(y_1-y_2)| \leqslant L|y_1-y_2|, \quad \forall (t,y_1),(t,y_2) \in \Pi.$$

Замечание 2.1.2. *Функция $f(t,y)$ может быть не дифференцируема по y, но удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим, например, функцию $f(t,y) = (t-t_0)|y-y_0|$. Очевидно, что она не дифференцируема при $y = y_0, t \neq t_0$, однако для всех $(t,y_1),(t,y_2) \in \Pi$ имеем*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t-t_0| \cdot \big||y_1-y_0| - |y_2-y_0|\big| \leqslant T|y_1-y_2|.$$

Замечание 2.1.3. *Функция $f(t,y)$ может быть непрерывной по y, но не удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим, например, функцию*

$$f(y) = \left\{ \begin{array}{rl} \sqrt{y}, & 0 \leqslant y \leqslant 1; \\ -\sqrt{|y|}, & -1 \leqslant y \leqslant 0. \end{array} \right.$$

Очевидно, что она непрерывна на отрезке $[-1,1]$. Покажем, что она не удовлетворяет условию Липшица. Предположим, что оно выполнено. Тогда существует такая постоянная L, что

$$|\sqrt{y}_1 - \sqrt{y}_2| \leqslant L|y_1-y_2|, \quad \forall y_1,y_2 \in [-1,1].$$

Пусть $y_1 > 0$, $y_2 = 0$. Тогда $y_1 \leqslant L^2y_1^2$, и, взяв $0 < y_1 < L^{-2}$, мы получим противоречие.

2.1.4. Теорема единственности решения задачи Коши

Докажем теперь теорему единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2).

Теорема 2.1.1. *Пусть функция $f(t,y)$ непрерывна в Π и удовлетворяет в Π условию Липшица по y. Если $y_1(t)$, $y_2(t)$ – решения задачи Коши (2.1), (2.2) на отрезке $[t_1,t_2]$, то $y_1(t) = y_2(t)$ для $t \in [t_1,t_2]$.*

Доказательство. Так как $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – решения задачи Коши (2.1), (2.2), то из леммы 2.1.1 следует, что они являются решениями интегрального уравнения (2.3). То есть

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1,t_2], \\ y_2(t) &= y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1,t_2]. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая разность по модулю, получаем

$$|y_1(t) - y_2(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))|d\tau\right|, \quad t \in [t_1,t_2].$$

Используя условие Липшица, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant L\left|\int\limits_{t_0}^{t} |y_1(\tau) - y_2(\tau)|d\tau\right|, \quad t \in [t_1,t_2].$$

Обозначив $z(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$, перепишем последнее неравенство следующим образом

$$0 \leqslant z(t) \leqslant L\left|\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|, \quad t \in [t_1,t_2].$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана 2.1.2 с $c = 0$ и $d = L$, имеем $z(t) = 0$, $t \in [t_1,t_2]$. Следовательно, $y_1(t) = y_2(t)$, $t \in [t_1,t_2]$ и теорема 2.1.1 доказана. □

Замечание 2.1.4. *Если условие Липшица не выполнено, то решение задачи (2.1), (2.2) может не быть единственным. Например, если*

$$f(y) = \left\{ \begin{array}{rl} \sqrt{y}\ , & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ -\sqrt{|y|}, & -1 \leqslant y \leqslant 0, \end{array} \right.$$

то задача Коши $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = 0$ имеет решения

$$y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = \left\{ \begin{array}{rl} t^2/4, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ -t^2/4, & -2 \leqslant t \leqslant 0. \end{array} \right.$$

2.1.5. Локальная теорема существования решения задачи Коши

Перейдем к доказательству существования решения задачи с начальным условием. Следует отметить, что мы можем доказать теорему существования не на всем исходном отрезке $[t_0-T, t_0+T]$, а на некотором, вообще говоря, меньшем. Поэтому эта теорема часто называется локальной теоремой существования решения задачи Коши.

Теорема 2.1.2. *Пусть функция $f(t,y)$ непрерывна в Π, удовлетворяет в Π условию Липшица по y и*

$$|f(t,y)| \leqslant M, \quad (t,y) \in \Pi.$$

Тогда на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$, где

$$h = \min\{T, \frac{A}{M}\},$$

существует функция $y(t)$ такая, что $y(t) \in C^1[t_0-h, t_0+h]$, $|y(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0-h, t_0+h], \tag{2.7}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Из леммы 2.1.1 следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать существование функции $y(t) \in C[t_0-h, t_0+h]$ такой, что $|y(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$, и являющейся решением интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0-h, t_0+h]. \tag{2.9}$$

Проведем доказательство, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций $y_k(t)$, $k = 0,1,2,\ldots$ таких, что $y_0(t) = y_0$,

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0-h, t_0+h], k = 0,1,2,\ldots. \tag{2.10}$$

Покажем, используя метод математической индукции, что для всех $k = 0,1,2,\ldots$ выполнено

$$y_k(t) \in C[t_0-h, t_0+h], \quad |y_k(t)-y_0| \leqslant A, \quad t \in [t_0-h, t_0+h].$$

Для $k = 0$ это очевидно справедливо, поскольку $y_0(t) = y_0$.

Пусть это верно для $k = m$. То есть

$$y_m(t) \in C[t_0-h, t_0+h], \quad |y_m(t)-y_0| \leqslant A, \quad t \in [t_0-h, t_0+h].$$

Покажем, что

$$y_{m+1}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0-h, t_0+h] \tag{2.11}$$

такова, что $y_{m+1}(t) \in C[t_0-h, t_0+h]$ и $|y_{m+1}(t)-y_0| \leqslant A, t \in [t_0-h, t_0+h]$.

Действительно, так как $|y_m(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$, то функция $f(t, y_m(t))$ определена и непрерывна на $[t_0-h, t_0+h]$. Значит интеграл, стоящий в правой части (2.11), определен и непрерывен при $t \in [t_0-h, t_0+h]$. Следовательно, $y_{m+1}(t) \in C[t_0-h, t_0+h]$.

Оценим

$$|y_{m+1}(t)-y_0| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau))|d\tau\right| \leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} Md\tau\right| \leqslant Mh \leqslant M\cdot\frac{A}{M} = A, \quad t \in [t_0-h, t_0+h].$$

Таким образом $|y_{m+1}(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$. Следовательно, мы показали что все $y_k(t) \in C[t_0-h, t_0+h]$ и $|y_k(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Докажем, используя метод математической индукции, что для $t \in [t_0-h, t_0+h]$ справедливы неравенства

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leqslant AL^k\frac{|t-t_0|^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{2.12}$$

Для $k = 0$ имеем

$$|y_1(t) - y_0(t)| = \left|y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_0)d\tau - y_0\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_0)d\tau\right| \leqslant Mh \leqslant A, \quad t \in [t_0-h, t_0+h],$$

то есть при $k = 0$ оценка (2.12) верна.

Пусть неравенство (2.12) справедливо для $k = m-1$. Покажем, что тогда оно справедливо при $k = m$. Действительно

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| = \left|y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau - y_0 - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_{m-1}(\tau))d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau)) - f(\tau, y_{m-1}(\tau))|d\tau\right|, \quad t \in [t_0-h, t_0+h].$$

Используя условие Липшица и неравенство (2.12) для $k = m-1$, получим

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \leqslant L\left|\int\limits_{t_0}^{t} |y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)|d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int\limits_{t_0}^{t} AL^{m-1}\frac{|\tau-t_0|^{m-1}}{(m-1)!}d\tau\right| = AL^m\frac{|t-t_0|^m}{m!}, \quad t \in [t_0-h, t_0+h].$$

Следовательно, оценка (2.12) справедлива при $k = m$, и значит она доказана для любого $k \in \mathbb{N}$.

Представим функции $y_k(t)$ как частичные суммы ряда

$$y_k(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{k}(y_n(t) - y_{n-1}(t)), \quad n = 1,2,\ldots$$

Равномерная сходимость последовательности функций $y_k(t)$ на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(y_n(t) - y_{n-1}(t)) \tag{2.13}$$

на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$. Применим признак Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости ряда (2.13) на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$. Из оценки (2.12) следует, что

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leqslant AL^{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} = c_n, \quad t \in [t_0-h, t_0+h], \quad n = 1,2,\ldots$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, ряд (2.13) сходится равномерно на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$. Это означает, что последовательность функций $y_k(t)$ сходится равномерно на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ к некоторой функции $y(t)$. Так как все функции $y_k(t)$ непрерывны на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$, то функция $y(t)$ также непрерывна на этом отрезке, то есть $y(t) \in C[t_0-h, t_0+h]$.

Покажем, что $|y(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$. Как было доказано, $|y_k(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$, $k = 0,1,2,\ldots$. Переходя в этом

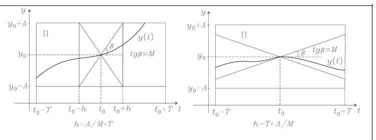


Рис. 2.1. К доказательству теоремы существования решения задачи Коши.

неравенстве к пределу при $k \to \infty$ и произвольном фиксированном $t \in [t_0-h, t_0+h]$, получим, что $|y(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$.

Покажем, что $y(t)$ является решением интегрального уравнения (2.9). В силу равномерной на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ сходимости $y_k(t)$ к функции $y(t)$ для произвольного $\delta > 0$ найдется номер $k_0(\delta)$ такой, что при $k \geqslant k_0(\delta)$ справедливо неравенство $|y_k(t) - y(t)| < \delta$ для всех $t \in [t_0-h, t_0+h]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выбираем $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{Lh}$ и $k_0 = k_0(\delta(\varepsilon))$ так, что при $k \geqslant k_0$ справедливо неравенство

$$|f(\tau, y_k(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| \leqslant L|y_k(\tau) - y(\tau)| < \frac{\varepsilon}{h}, \quad \tau \in [t_0-h, t_0+h].$$

Тогда для разности интегралов получаем оценки

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau))d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau\right| < \frac{\varepsilon}{h}|t-t_0| \leqslant \varepsilon, \quad t \in [t_0-h, t_0+h],$$

позволяющие перейти в (2.10) к пределу при $k \to \infty$ и произвольном фиксированном $t \in [t_0-h, t_0+h]$. В результате получаем, что $y(t)$ является решением интегрального уравнения (2.9).

Таким образом, мы показали, что $y(t) \in C[t_0-h, t_0+h]$, $|y(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$ и является решением интегрального уравнения (2.9). Следовательно, $y(t)$ является решением задачи с начальным условием на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ и теорема 2.1.2 доказана. □

Вернемся опять к вопросу о том, почему мы не можем доказать теорему существования на всем отрезке $[t_0-T, t_0+T]$, а доказываем существование решения только на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$, где $h = \min\{T, \dfrac{A}{M}\}$ (см. рис. 2.1). Это объясняется тем, что мы должны следить за тем, чтобы точка $(t, y(t))$ не выходила за пределы прямоугольника Π, то есть чтобы выполнялось неравенство $|y(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$. Это необходимо, поскольку только в Π функция $f(t,y)$ ограничена фиксированной постоянной M и удовлетворяет условию Липшица с фиксированной константой L. Попытки увеличить число $h = \min\{T, \dfrac{A}{M}\}$ за счет увеличения A, вообще говоря, безрезультатны, поскольку при увеличении A в общем случае увеличивается постоянная M.

Приведем пример, показывающий, что без дополнительных предположений относительно функции $f(t,y)$ решение существует только на достаточно малом отрезке.

Пример 2.1.1. *Рассмотрим при $a > 0$ задачу Коши*

$$y'(t) = a(y(t)^2 + 1), \quad y(0) = 0.$$

Функция $f(t,y) = a(y^2+1)$ определена при любых действительных t и y. Однако решение этой задачи $y(t) = \mathrm{tg}(at)$ существует только на отрезке $[-h_1,h_1]$, содержащемся в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2a}, \dfrac{\pi}{2a}\right)$.

2.2. Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

2.2.1. Примеры постановки задачи Коши

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0. \tag{2.14}$$

Всюду в этом параграфе будем считать, что функция $F(t,y,p)$ определена в параллелепипеде D с центром в некоторой точке $(t_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$:

$$D = \{(t,y,p): \ |t-t_0| \leqslant a, \ |y-y_0| \leqslant b, \ |p-y_0'| \leqslant c\}, \tag{2.15}$$

где a, b, c – фиксированные положительные числа.

Определение 2.2.1. *Функция $y(t)$ называется решением уравнения (2.14) на отрезке $[t_1,t_2]$, если:*

1. *$y(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1,t_2]$;*
2. *$(t, y(t), y'(t)) \in D$ для всех $t \in [t_1,t_2]$;*
3. *на отрезке $[t_1,t_2]$ выполнено (2.14).*

Если уравнение (2.14) разрешено относительно производной,

$$F(t,y,p) = p - f(t,y),$$

то при некоторых дополнительных условиях на функцию $f(t,y)$ для получения единственного решения уравнения достаточно задать условие прохождения соответствующей интегральной кривой (графика решения) через некоторую точку (t_0, y_0). В общем случае приходим к задаче с дополнительным условием

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.16}$$

Проиллюстрируем особенности такой задачи для случая уравнения, квадратично зависящего от производной:

$$(y'(t))^2 - (t + y(t))y'(t) + ty(t) = 0. \tag{2.17}$$

Поскольку квадратное уравнение $p^2 - (t+y)p + ty = 0$ имеет корни $p_1 = t, p_2 = y$, то исходное дифференциальное уравнение распадается на совокупность двух уравнений, разрешенных относительно производной:

$$y'(t) = t, \quad y'(t) = y(t).$$

Получаем два семейства решений

$$y_1(t) = \frac{t^2}{2} + C_1, \quad y_2(t) = C_2\exp\{t\}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

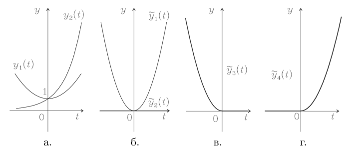
Пример 2.2.1. *Задача для уравнения (2.17) с дополнительным условием $y(0) = 1$ имеет два решения (см. рис. 2.2а):*

$$y_1(t) = \frac{t^2}{2} + 1, \quad y_2(t) = \exp\{t\}. \tag{2.18}$$

Задача для уравнения (2.17) с дополнительным условием $y(0) = 0$ имеет четыре решения (см. рис. 2.2б-г):

$$\widetilde{y}_1(t) = \frac{t^2}{2}, \quad \widetilde{y}_2(t) = 0,$$

$$\widetilde{y}_3(t) = \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{y}_1(t),\ t < 0, \\ \widetilde{y}_2(t),\ t \geqslant 0, \end{array} \right. \quad \widetilde{y}_4(t) = \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{y}_2(t),\ t < 0, \\ \widetilde{y}_1(t),\ t \geqslant 0. \end{array} \right. \tag{2.19}$$



а. б. в. г.

Рис. 2.2. К примерам 2.2.1, 2.2.2: неединственность решения задачи Коши.

Рассмотренный пример показывает, что неединственность решения достаточно характерна для задачи (2.16). Для единственности необходимо задать еще одно дополнительное условие. Из геометрических соображений наиболее естественно потребовать, чтобы искомое решение проходило через заданную точку с данным наклоном касательной. В результате приходим к постановке задачи Коши

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \tag{2.20}$$

Пример 2.2.2. *Задача Коши для уравнения (2.17) с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, то есть*

$$(t_0, y_0, y_0') = (0,1,0), \quad F(0,1,0) = 0, \quad \frac{\partial F(0,1,0)}{\partial p} = -1 \neq 0, \tag{2.21}$$

имеет единственное решение $y(t) = \dfrac{t^2}{2} + 1$.

Задача Коши для уравнения (2.17) с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, то есть

$$(t_0, y_0, y_0') = (0,1,1), \quad F(0,1,1) = 0, \quad \frac{\partial F(0,1,1)}{\partial p} = 1 \neq 0, \tag{2.22}$$

имеет единственное решение $y(t) = \exp\{t\}$.

Задача Коши для уравнения (2.17) с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = y_0'$, $\forall y_0' \notin \{0;1\}$, то есть

$$(t_0, y_0, y_0') = (0,1,y_0'), \quad F(t_0, y_0, y_0') \neq 0, \tag{2.23}$$

не имеет ни одного решения.

Задача Коши для уравнения (2.17) с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, то есть

$$(t_0, y_0, y_0') = (0,0,0), \quad F(0,0,0) = 0, \quad \frac{\partial F(0,0,0)}{\partial p} = 0, \tag{2.24}$$

имеет четыре решения (2.19).

Приведенный пример показывает следующие особенности постановки задачи Коши (2.20):

1. тройка чисел $(t_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$ не может быть взята произвольно; для существования решения необходимо выполнения условия $F(t_0, y_0, y_0') = 0$;

2. двух дополнительных условий $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ может оказаться недостаточно для единственности решения в случае
$$\frac{\partial F(t_0, y_0, y_0')}{\partial p} = 0.$$

2.2.2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Теорема 2.2.1. *Пусть функция $F(t,y,p)$ определена в параллелепипеде D, заданным (2.15), и выполнены следующие условия:*

$$1.\quad F(t_0, y_0, y_0') = 0; \tag{2.25}$$

$$2.\quad F(t,y,p), \quad \frac{\partial F(t,y,p)}{\partial y}, \quad \frac{\partial F(t,y,p)}{\partial p} \text{ непрерывны в } D; \tag{2.26}$$

$$3.\quad \frac{\partial F(t_0, y_0, y_0')}{\partial p} \neq 0. \tag{2.27}$$

Тогда найдется $h > 0$ такое, что на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственное решение задачи Коши (2.20).

Доказательство. Рассмотрим в окрестности точки (t_0, y_0, y_0') уравнение
$$F(t,y,p) = 0. \tag{2.28}$$
Из условий (2.25)-(2.27) и теоремы о неявной функции следует, что найдется окрестность Ω_0 точки (t_0, y_0), в которой существует единственная непрерывная функция $p = f(t,y)$, имеющая в Ω_0 непрерывную частную производную
$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = -\frac{\partial F(t,y,f(t,y))/\partial y}{\partial F(t,y,f(t,y))/\partial p}, \tag{2.29}$$
и являющаяся решением уравнения (2.28). В частности, выполнено равенство
$$y_0' = f(t_0, y_0). \tag{2.30}$$

В окрестности Ω_0 уравнение (2.14) эквивалентно дифференциальному уравнению $y'(t) = f(t, y(t))$, разрешенному относительно производной, а задача Коши (2.20) принимает вид
$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.31}$$
Отметим, что фигурирующее в (2.20) начальное условие на производную $y'(t_0) = y_0'$ автоматически выполнено в силу равенства (2.30).

Рассмотрим задачу Коши (2.31) в прямоугольнике
$$\Pi = \{(t,y): \quad |t - t_0| \leqslant a_0, \quad |y - y_0| \leqslant b_0\},$$
где положительные числа a_0, b_0 настолько малы, чтобы $\Pi \subset \Omega_0$. Как уже установлено выше, функция $f(t,y)$ непрерывна в Ω_0, а значит и в Π. Условие Липшица для этой функции по переменной y на множестве Π с константой
$$L = \max_{(t,y)\in\Pi} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|$$
вытекает из непрерывности в Π частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y)$, определенной в (2.29). Таким образом, в Π выполнены все условия теоремы 2.1.2 существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной. Следовательно, найдется $h > 0$ такое, что на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственное решение задачи Коши (2.31), а значит и задачи Коши (2.20). □

Замечание 2.2.1. *В приведенном выше примере 2.2.2 условия теоремы 2.2.1 выполнены для задач Коши (2.21), (2.22) и не выполнены для задач Коши (2.23), (2.24).*

2.2.3. Методы интегрирования

Рассмотрим метод интегрирования уравнения (2.14), основанный на его почленном дифференцировании. Получающееся уравнение становится линейным относительно старшей производной, и в нем эффективно производится замена искомой функции.

Уравнение вида $y = f(t, y')$, разрешенное относительно переменной y, эквивалентно системе двух уравнений
$$y = f(t,p), \quad dy = pdt.$$
Из первого уравнения выражаем dy, воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала:
$$dy = \frac{\partial f(t,p)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t,p)}{\partial p}dp = pdt.$$
Последнее равенство задает дифференциальное уравнение первого порядка в симметричном виде относительно переменных t, p. Если удалось найти параметрическое решение этого уравнения $t = \varphi(\tau, c)$, $p = \psi(\tau, c)$, то и решение исходного уравнения существует в параметрическом виде
$$t = \varphi(\tau, c), \quad y = f(\varphi(\tau, c), \psi(\tau, c).$$

Уравнение вида $t = f(y, y')$, разрешенное относительно переменной t, эквивалентно системе 2-х уравнений
$$t = f(y,p), \quad dy = pdt.$$
Из первого уравнения выражаем dt, воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала:
$$dt = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp = \frac{dy}{p}.$$
Последнее равенство задает дифференциальное уравнение первого порядка в симметричном виде относительно переменных y, p. Если удалось найти параметрическое решение этого уравнения $y = \varphi(\tau, c)$, $p = \psi(\tau, c)$, то и решение исходного уравнения существует в параметрическом виде
$$y = \varphi(\tau, c), \quad t = f(\varphi(\tau, c), \psi(\tau, c)).$$

Уравнение вида $F(t, y, y') = 0$ эквивалентно системе 2-х уравнений
$$F(t,y,p) = 0, \quad dy = pdt.$$
Относительно первого уравнения предположим, что оно задает гладкую поверхность в $\mathbb{R}^3$, описываемую параметрически с помощью непрерывно дифференцируемых функций $T(u,v)$, $Y(u,v)$, $P(u,v)$:
$$t = T(u,v), \quad y = Y(u,v), \quad p = P(u,v).$$
Воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала, вычисляем dy, dt и получаем дифференциальную связь между параметрами (u,v), которая выделяет из всех точек поверхности именно интегральные кривые:
$$\frac{\partial Y(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial Y(u,v)}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial T(u,v)}{\partial v}dv\right)P(u,v).$$
Получаем дифференциальное уравнение первого порядка в симметричном виде относительно переменных u, v. Если удалось найти параметрическое решение этого уравнения $u = \varphi(\tau, c)$, $v = \psi(\tau, c)$, то и решение исходного уравнения существует в параметрическом виде
$$t = T(\varphi(\tau, c), \psi(\tau, c)), \quad y = Y(\varphi(\tau, c), \psi(\tau, c)).$$

2.2.4. Особые решения дифференциального уравнения первого порядка

Определение 2.2.2. *Функция $y = \xi(t)$ называется особым решением дифференциального уравнения*
$$F(t, y(t), y'(t)) = 0$$
на отрезке $[t_1, t_2]$, если $y = \xi(t)$ является решением уравнения на этом отрезке в смысле определения 2.2.1, и через каждую точку соответствующей интегральной кривой
$$\Gamma = \{(t,y): \quad y = \xi(t), \quad t \in [t_1, t_2]\}$$
проходит другое решение этого уравнения с тем же самым наклоном касательной, но отличающееся от данного решения в сколь угодно малой окрестности точки.

Таким образом, в каждой точке интегральной кривой особого решения нарушается единственность решения задачи Коши
$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \forall (t_0, y_0) \in \Gamma.$$
Следовательно, нарушается одно или несколько условий доказанной выше теоремы 2.2.1 о существовании и единственности решения задачи Коши. Рассмотрим основные ситуации, приводящие к появлению особых решений. Нас будут интересовать прежде всего необходимые условия для существования особых решений.

Если не выполнены условия гладкости функции $F(t,y,p)$, то примеры особых решений нетрудно построить даже для разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений.

Пример 2.2.3. *Уравнение*
$$y' = \sqrt[3]{y^2} \tag{2.32}$$
имеет решение $y_0(t) \equiv 0$ и семейство решений $y(t, C) = \dfrac{(t - C)^3}{27}$. Функция $y_0(t)$ является особым решением уравнения (2.32) на любом отрезке $[t_1, t_2]$, поскольку для любого $t_0 \in [t_1, t_2]$ найдется $C = t_0$ такое, что через точку $(t_0, 0)$ интегральной кривой решения $y_0(t)$ проходит другое решение
$$y(t, t_0) = \frac{(t - t_0)^3}{27}$$
с тем же самым нулевым углом наклона касательной (см. рис. 1.3). В данном случае $F(t,y,p) = p - \sqrt[3]{y^2}$ является непрерывной функцией, а производная
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$$
не существует при $y = 0$, то есть нарушено одно из условий (2.26).

Таким образом, особое решение может содержаться среди тех кривых, на которых частная производная $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ не существует.

Пусть теперь выполнены условия (2.26) относительно $F(t,y,p)$. Если существует особое решение $\xi(t)$, то во всех точках его интегральной кривой должны выполняться два равенства
$$F(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0.$$
Ясно, что тройка $(t, \xi(t), \xi'(t))$ при каждом t является решением системы уравнений
$$\begin{cases} F(t,y,p) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial p}(t,y,p) = 0. \end{cases} \tag{2.33}$$
Часто из системы (2.33) можно исключить переменную p и получить уравнение $\Phi(t,y) = 0$. Решения этого уравнения на плоскости задаются одной или несколькими линиями, которые называются *дискриминантными кривыми.*

Возможны следующие три случая:

1. уравнение $\Phi(t,y) = 0$ задает особое решение;

2. уравнение $\Phi(t,y) = 0$ задает решение уравнения (2.14), которое не является особым;

3. уравнение $\Phi(t,y) = 0$ задает функцию, не являющуюся решением уравнения (2.14).

Приведем соответствующие примеры.

Пример 2.2.4. *Перепишем уравнение (2.32) из примера 2.2.3 в виде*
$$(y')^3 - y^2 = 0.$$
Из системы (2.33) для дискриминантной кривой
$$\begin{cases} p^3 - y^2 = 0, \\ 3p^2 = 0 \end{cases}$$
находим функцию $y(t) = 0$, которая является особым решением.

Пример 2.2.5. *Рассмотрим уравнение*
$$(y')^2 - y^2 = 0.$$
Из системы (2.33) для дискриминантной кривой
$$\begin{cases} p^2 - y^2 = 0, \\ 2p = 0 \end{cases}$$
находим функцию $y(t) = 0$, которая является решением исходного уравнения. Для проверки того, будет ли найденное решение особым, проинтегрируем исходное уравнение и найдем два семейства решений
$$y_1(t) = c_1 \exp\{t\}, \quad y_2(t) = c_2 \exp\{-t\}.$$
Ни одна из интегральных кривых этих семейств решений не касается интегральной кривой решения $y(t) = 0$ ни в одной точке. Следовательно, решение $y(t) = 0$ не является особым для рассматриваемого уравнения.

Пример 2.2.6. *Рассмотрим уравнение (2.17). Система (2.33) для дискриминантной кривой*
$$\begin{cases} p^2 - (t+y)p + ty = 0, \\ 2p - t - y = 0 \end{cases}$$
дает функцию $y(t) = t$, которая не является решением (2.17). Следовательно, особых решений рассматриваемое уравнение не имеет.

2.3. Задача Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения n-го порядка на всем отрезке

В этом разделе мы докажем теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения n-го порядка на произвольном отрезке.

2.3.1. Постановка задачи Коши для нормальной системы

Пусть функции $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ определены и непрерывны для
$$t \in [a,b], \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$
Требуется определить функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, являющиеся решениями нормальной системы дифференциальных уравнений на отрезке $[a,b]$
$$\begin{cases} y_1'(t) &=& f_1(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ y_2'(t) &=& f_2(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ & \ldots & \\ y_n'(t) &=& f_n(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \end{cases} \tag{2.34}$$
и удовлетворяющие начальным условиям
$$y_1(t_0) = y_{01}, \quad y_2(t_0) = y_{02}, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = y_{0n}, \tag{2.35}$$
где t_0 – некоторая фиксированная точка отрезка $[a,b]$, а $y_{01}, y_{02}, \ldots y_{0n}$ – заданные вещественные числа. Эта задача называется задачей Коши или задачей с начальным условием для нормальной системы дифференциальных уравнений (2.34).

Определение 2.3.1. *Функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ называются решением задачи Коши (2.34), (2.35) на отрезке $[a,b]$, если:*

1. функции $y_i(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2. $y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$, $t \in [a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

3. $y_i(t_0) = y_{0i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 2.3.2. *Функция $f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ удовлетворяет условию Липшица по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, если найдется такая положительная константа $L > 0$, что выполнены неравенства*
$$\begin{aligned} &|f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)| \leqslant \\ &\quad \leqslant L\big(|y_1 - \widetilde{y}_1| + |y_2 - \widetilde{y}_2| + \cdots + |y_n - \widetilde{y}_n|\big), \\ &\quad \forall t \in [a,b], \quad \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n), (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.36}$$

2.3.2. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы

Докажем единственность решения задачи Коши (2.34), (2.35) для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 2.3.1. *Пусть функции $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, определены и непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (2.36) с одной и той же константой L.*

Тогда, если функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ и $\widetilde{y}_1(t), \widetilde{y}_2(t), \ldots, \widetilde{y}_n(t)$ являются решениями задачи Коши (2.34), (2.35) на отрезке $[a,b]$, то $y_i(t) = \widetilde{y}_i(t)$ для $t \in [a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Так как функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ – решения задачи Коши (2.34), (2.35), то
$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \quad t \in [a,b], \quad y_i(t_0) = y_{0i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
Интегрируя дифференциальное уравнение от t_0 до t и используя начальное условие (2.35), получим для $i = 1, 2, \ldots, n$
$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots, y_n(\tau))d\tau, \quad t \in [a,b]. \tag{2.37}$$
Компоненты $\widetilde{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ другого решения удовлетворяют таким же уравнениям
$$\widetilde{y}_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, \widetilde{y}_1(\tau), \widetilde{y}_2(\tau), \ldots, \widetilde{y}_n(\tau))d\tau, \quad t \in [a,b]. \tag{2.38}$$
Вычитая уравнения (2.38) из уравнений (2.37) и используя условие Липшица (2.36), получим для $i = 1, 2, \ldots, n$ и $t \in [a,b]$
$$\begin{aligned} &|y_i(t) - \widetilde{y}_i(t)| = \\ &= \left|\int_{t_0}^{t} \big(f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots, y_n(\tau)) - f_i(\tau, \widetilde{y}_1(\tau), \widetilde{y}_2(\tau), \ldots, \widetilde{y}_n(\tau))\big)\, d\tau\right| \leqslant \\ &\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t} \Big(|y_1(\tau) - \widetilde{y}_1(\tau)| + |y_2(\tau) - \widetilde{y}_2(\tau)| + \cdots + |y_n(\tau) - \widetilde{y}_n(\tau)|\Big)d\tau\right|. \end{aligned}$$
Введем функцию
$$z(t) = |y_1(t) - \widetilde{y}_1(t)| + |y_2(t) - \widetilde{y}_2(t)| + \cdots + |y_n(t) - \widetilde{y}_n(t)|.$$
Тогда полученное неравенство можно переписать так:
$$|y_i(t) - \widetilde{y}_i(t)| \leqslant L\left|\int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [a,b].$$
Складывая все эти неравенства, имеем
$$z(t) \leqslant nL\left|\int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|, \quad t \in [a,b].$$
Из леммы Гроноулла-Беллмана 2.1.2 следует, что $z(t) = 0$, $t \in [a,b]$. Это означает, что
$$y_i(t) = \widetilde{y}_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [a,b].$$
Теорема 2.3.1 доказана. □

2.3.3. Теорема существования решения задача Коши для нормальной системы на всем отрезке

Перейдем к доказательству теоремы существования решения задачи Коши для нормальной системы (2.34), (2.35). Теорема существования решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка была доказана в параграфе 2.1.5. Важно еще раз заметить, что в этой теореме существование решения доказывалось только на некотором малом отрезке, и без дополнительных предположений относительно функции $f(t,y)$ более сильный результат получить невозможно. Конечно, подобные проблемы сохраняются и для задачи Коши для нормальной системы, поскольку задача Коши для одного уравнения является ее частным случаем. Однако в этом параграфе мы сделаем такие предположения относительно функций $f_k(t, y_1, \ldots, y_n)$, которые позволят доказать теорему существования решения на всем отрезке. Локальная теорема существования решения задачи Коши (2.34), (2.35) аналогичная той, которая была доказана в параграфе 2.1.5, будет доказана позже в параграфе 2.4

Теорема 2.3.2. *Пусть функции $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, определены и непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (2.36) с одной и той же константой L.*

Тогда существуют функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, являющиеся решением задачи Коши (2.34), (2.35) на всем отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $y_i(t)$
$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots, y_n(\tau))d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.39}$$

Покажем, что если функции $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.39), то они являются решением задачи Коши (2.34), (2.35) на отрезке $[a,b]$.

Действительно, положив в (2.39) $t = t_0$, получим, что $\bar{y}_i(t)$ удовлетворяет условиям (2.35). Дифференцируя (2.39) по t, убеждаемся в том, что выполнены уравнения (2.34).

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что существуют функции $\bar{y}_i(t)$ непрерывные на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющие системе интегральных уравнений (2.39).

Докажем существование таких функций $\bar{y}_i(t)$, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательности функций $y_1^k(t), y_2^k(t), \ldots, y_n^k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ таких, что
$$y_i^{k+1}(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1^k(\tau), y_2^k(\tau), \ldots, y_n^k(\tau))d\tau, \quad y_i^0(t) = y_{0i}, \tag{2.40}$$
$i = 1, 2, \ldots, n$, $t \in [a,b]$. Докажем, что все $y_i^k(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$.

Для $y_i^0(t)$ это верно. Предположим, что это верно для $y_i^m(t)$ и покажем, что это верно для $y_i^{m+1}(t)$. Так как все функции $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, то из (2.40) следует, что $y_i^{m+1}(t)$ определены и непрерывны на $[a,b]$.

Обозначим через B следующую постоянную
$$B = \max_{i=1,2,\ldots,n} \max_{t\in[a,b]} \left|\int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})d\tau\right|.$$

Покажем, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $k = 0, 1, \ldots$ на отрезке $[a,b]$ справедливы оценки
$$|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \leqslant B(nL)^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}. \tag{2.41}$$
При $k = 0$ это верно, так как
$$|y_i^1(t) - y_i^0(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})d\tau\right| \leqslant B.$$
Пусть неравенство (2.41) справедливо для $k = m - 1$. Покажем, что оно выполнено для $k = m$. Из (2.40) имеем
$$\begin{aligned} &|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leqslant \\ &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f_i(\tau, y_1^m(\tau), y_2^m(\tau), \ldots, y_n^m(\tau)) - \right. \\ &\left. - f_i(\tau, y_1^{m-1}(\tau), y_2^{m-1}(\tau), \ldots, y_n^{m-1}(\tau))|d\tau\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} L\Big(|y_1^m(\tau) - y_1^{m-1}(\tau)| + |y_2^m(\tau) - y_2^{m-1}(\tau)| + \ldots \right. \\ &\left. \cdots + |y_n^m(\tau) - y_n^{m-1}(\tau)|\Big)d\tau\right|. \end{aligned}$$
Используя предположение индукции, получим
$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} B(nL)^m \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!}d\tau\right| \leqslant B(nL)^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}.$$
Следовательно, неравенство (2.41) доказано по индукции.

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ функциональные ряды
$$y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} (y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
Из (2.41)следует, что на отрезке $[a,b]$ справедливы оценки
$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leqslant B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \ldots.$$
Учитывая эти оценки и используя признак Вейерштрасса, получим, что функциональные ряды сходятся равномерно на отрезке $[a,b]$. Следовательно, последовательности непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций
$$y_i^k(t) = y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{k-1} (y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
сходятся равномерно на отрезке $[a,b]$ к непрерывным функциям $\bar{y}_i(t)$.

Переходя к пределу при $k \to +\infty$ в формулах (2.40), получим, что функции $\bar{y}_i(t)$ являются решением системы интегральных уравнений (2.39), а значит и задачи (2.34), (2.35). Теорема 2.3.2 доказана. □

Замечание 2.3.1. *Для выполнения условия Липшица (2.36) достаточно, чтобы все функции $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ имели равномерно ограниченные частные производные*
$$\left|\frac{\partial f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_j}\right| \leqslant D, \quad \forall t \in [a,b], \quad \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$k, j = 1, 2, \ldots, n$, D – постоянная. Действительно, в этом случае
$$\begin{aligned} &|f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_k(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)| \leqslant \\ &\leqslant |f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_k(t, \widetilde{y}_1, y_2, \ldots, y_n)| + \\ &+ |f_k(t, \widetilde{y}_1, y_2, \ldots, y_n) - f_k(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, y_n)| + \ldots \\ &\cdots + |f_k(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, y_n) - f_k(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)|. \end{aligned}$$
Применяя формулу Лагранжа по каждой переменной, получим
$$\begin{aligned} &|f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_k(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)| \leqslant \\ &\qquad \leqslant D\Big(|y_1 - \widetilde{y}_1| + |y_2 - \widetilde{y}_2| + \cdots + |y_n - \widetilde{y}_n|\Big). \end{aligned}$$
Следовательно, все функции $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ удовлетворяют условию Липшица (2.36) с постоянной $L = D$.

Используя это замечание, легко привести пример системы, удовлетворяющей условиям теорем 2.3.1 и 2.3.2.

Пример 2.3.1. *Для системы*
$$\begin{cases} y_1'(t) = t\sin(y_1(t) + y_2(t)) + \dfrac{(y_1(t))^3}{1 + (y_1(t))^2}, \\ y_2'(t) = t^2 y_2(t) + \cos(y_1(t) + y_2(t)) \end{cases}$$
выполнены условия теорем 2.3.1 и 2.3.2, и решение задачи Коши для этой системы существует и единственно на любом отрезке $[a,b]$.

2.3.4. Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка на всем отрезке

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной,
$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), \quad t \in [a,b], \tag{2.42}$$
где функция $F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ задана, а $y(t)$ – неизвестная искомая функция.

Рассмотрим для функции $y(t)$ начальные условия
$$y(t_0) = y_{00},\ y'(t_0) = y_{01},\ y^{(2)}(t_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}, \tag{2.43}$$
где t_0 некоторое фиксированное число на отрезке $[a,b]$, а $y_{00}, \ldots, y_{0n-1}$ – заданные числа.

Задачей Коши или задачей с начальными условиями для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, называется задача отыскания функции $y(t)$, удовлетворяющей уравнению (2.42) и начальным условиям (2.43).

Определение 2.3.3. *Функция $y(t)$ называется решением задачи Коши (2.42), (2.43) на отрезке $[a,b]$, если $y(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функцией, $y(t)$ удовлетворяет уравнению (2.42) и начальным условиям (2.43).*

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (2.42), (2.43).

Теорема 2.3.3. *Пусть функция $F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определена и непрерывна при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица с константой $L_1 > 0$, то есть*
$$|F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) - F(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)| \leqslant L_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i - \widetilde{y}_i|, \tag{2.44}$$
$$\forall t \in [a,b], \quad \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n), (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n.$$
Тогда существует единственная функция $y(t)$, являющаяся решением задачи Коши (2.42), (2.43) на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Докажем вначале единственность решения. Пусть функция $y(t)$ является решением задачи Коши (2.42), (2.43) на отрезке $[a,b]$. Введем функции
$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \quad y_3(t) = y''(t), \quad \ldots \quad y_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$
Так как функция $y(t)$ является решением задачи Коши (2.42), (2.43) на отрезке $[a,b]$, то функции $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ являются решением задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} y_1'(t) &=& y_2(t), \\ y_2'(t) &=& y_3(t), \\ & \ldots & \\ y_{n-1}'(t) &=& y_n(t), \\ y_n'(t) &=& F(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \end{cases} \tag{2.45}$$
с начальными условиями
$$y_i(t_0) = y_{0i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.46}$$
Система (2.45) является частным случаем нормальной системы (2.34) с функциями
$$\begin{aligned} f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= y_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}$$
Эти функции определены и непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (2.36) с одной и той же константой
$$L = \max\{1, L_1\}.$$
Поэтому задача (2.45), (2.46) удовлетворяет условиям теоремы 2.3.1 о единственности решения задачи Коши для нормальной системы. Следовательно, решение задачи Коши (2.45), (2.46) единственно, а значит и решение задачи Коши (2.42), (2.43) также единственно.

Докажем существование решения решения Коши (2.42), (2.43). Рассмотрим задачу Коши (2.45), (2.46). Для нее выполнены условия теоремы 2.3.2 существования решения на отрезке $[a,b]$. То есть существуют непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции $y_i(t)$, удовлетворяющие (2.45), (2.46). Обозначив $y_1(t)$ через $y(t)$, получим, что $y(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функцией, $y^{(i-1)}(t) = y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $y(t)$ удовлетворяет (2.42), (2.43). Следовательно $y(t)$ является решением Коши (2.42), (2.43). Теорема 2.3.3 доказана. □

2.3.5. Задача Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка
$$\begin{cases} y_1'(t) &=& a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + \widehat{f}_1(t), \\ y_2'(t) &=& a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)y_n(t) + \widehat{f}_2(t), \\ & \ldots & \\ y_n'(t) &=& a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + \widehat{f}_n(t), \end{cases} \tag{2.47}$$
где $a_{ij}(t)$, $\widehat{f}_i(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ – заданные непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции.

Пусть задано начальное условие
$$y_i(t_0) = y_{0i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.48}$$

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (2.47), (2.48).

Теорема 2.3.4. *Пусть функции $a_{ij}(t)$, $\widehat{f}_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда существует единственный набор функций $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, являющийся решением задачи Коши (2.47), (2.48) на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Система (2.47) является частным случаем системы (2.34) с функциями
$$f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_{i1}(t)y_1 + a_{i2}(t)y_2 + \cdots + a_{in}(t)y_n + \widehat{f}_i(t), \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$
Эти функции $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определены и непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (2.36) с постоянной
$$L = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max_{t\in[a,b]} |a_{ij}(t)|.$$
Следовательно, для задачи Коши (2.47), (2.48) выполнены условия теорем 2.3.1 и 2.3.2, и она имеет единственное решение на отрезке $[a,b]$. Теорема 2.3.4 доказана. □

2.3.6. Задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t), \quad (2.49)$$

где $a_i(t)$, $i = 0,1,2,\dots,n$, $f(t)$ – заданные непрерывные на $[a,b]$ функции, причем $a_0(t) \neq 0$ на $[a,b]$.

Рассмотрим для функции $y(t)$ начальные условия в точке $t_0 \in [a,b]$

$$y^{(i)}(t_0) = y_{0i}, \quad i = 0,1,\dots,n-1. \quad (2.50)$$

Теорема 2.3.5. *Пусть функции $a_i(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[a,b]$, $i = 1,2,\dots,n$, $a_0(t) \neq 0$ на $[a,b]$. Тогда существует единственная функция $y(t)$, являющаяся решением задачи Коши (2.49), (2.50) на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Уравнение (2.49) является частным случаем уравнения (2.42) с функцией

$$F(t,y_1,y_2,\dots,y_n) = \frac{f(t)}{a_0(t)} - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}\cdot y_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}\cdot y_2 - \dots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\cdot y_n.$$

Эта функция $F(t,y_1,y_2,\dots,y_n)$ определена и непрерывна при $t \in [a,b]$, $(y_1,y_2,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица (2.44) с постоянной

$$L_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\ \max_{t\in[a,b]} \left|\frac{a_i(t)}{a_0(t)}\right|.$$

Следовательно, для задачи Коши (2.49), (2.50) выполнены условия теоремы 2.3.3 и ее решение существует и единственно на отрезке $[a,b]$. Теорема 2.3.5 доказана.

2.4. Задача Коши для нормальной системы (локальная теорема)

Пусть функции $f_i(t,y_1,y_2,\dots,y_n)$, $i = 1,2,\dots,n$ определены и непрерывны в $n+1$-мерном параллелепипеде

$$\Pi_{n+1} = \{(t,y_1,y_2,\dots,y_n): \quad |t-t_0| \leqslant T, \quad |y_i - y_{0i}| \leqslant A, \quad i = 1,2,\dots,n\}.$$

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(t) &=& f_1(t,y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)),\\ y_2'(t) &=& f_2(t,y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)),\\ &\dots&\\ y_n'(t) &=& f_n(t,y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)) \end{cases} \quad (2.51)$$

с начальным условием

$$y_1(t_0) = y_{01}, \quad y_2(t_0) = y_{02}, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = y_{0n}, \quad (2.52)$$

где $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$ – заданные числа.

Определение 2.4.1. *Функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ называются решением задачи Коши (2.51), (2.52) на отрезке $[t_0+h, t_0+h]$, $h \leqslant T$, если:*

1. *функции $y_i(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[t_0-h, t_0+h]$, $i = 1,2,\dots,n$;*
2. *$(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in \Pi_{n+1}$, $\forall t \in [t_0-h, t_0+h]$;*
3. *$y_i'(t) = f_i(t,y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t))$, $\forall t \in [t_0-h, t_0+h]$, $i = 1,2,\dots,n$;*
4. *$y_i(t_0) = y_{0i}$, $i = 1,2,\dots,n$.*

Отметим, что в отличие от определения 2.3.1, данное определение содержит условие принадлежности интегральной кривой параллелепипеду Π_{n+1}, поскольку только в Π_{n+1} определены функции $f_i(t,y_1,\dots,y_n)$.

Определение 2.4.2. *Функция $f(t,y_1,y_2,\dots,y_n)$ удовлетворяет в параллелепипеде Π_{n+1} условию Липшица по $y_1,y_2,\dots,y_n$, если найдется константа $L > 0$ такая, что*

$$\begin{aligned} &|f(t,y_1,y_2,\dots,y_n) - f(t,\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\dots,\widetilde{y}_n)| \leqslant\\ &\qquad \leqslant L\big(|y_1-\widetilde{y}_1| + |y_2-\widetilde{y}_2| + \dots + |y_n-\widetilde{y}_n|\big),\\ &\qquad\qquad \forall (t,y_1,y_2,\dots,y_n), (t,\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\dots,\widetilde{y}_n) \in \Pi_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Перейдем к доказательству существования и единственности решения задачи Коши (2.51), (2.52) для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы докажем теорему существования не на всем исходном отрезке $[t_0-T, t_0+T]$, а на некотором, вообще говоря, меньшем. Поэтому эта теорема называется локальной теоремой существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы.

Теорема 2.4.1. *Пусть функции $f_i(t,y_1,y_2,\dots,y_n)$, $i = 1,2,\dots,n$, определены и непрерывны в Π_{n+1}, удовлетворяют в Π_{n+1} условию Липшица (2.53) и*

$$|f_k(t,y_1,y_2,\dots,y_n)| \leqslant M, \quad \forall (t,y_1,y_2,\dots,y_n) \in \Pi_{n+1}, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

Тогда существует единственный набор функций $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, являющийся решением задачи Коши (2.51), (2.52) на отрезке

$$[t_0-h, t_0+h], \quad h = \min\left\{T, \frac{A}{M}\right\}.$$

Доказательство. Единственность решения задачи Коши доказывается аналогично доказательству теоремы 2.3.1. Докажем существование решения. Рассмотрим на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $y_i(t)$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau))d\tau, \quad i = 1,2,\dots,n. \quad (2.54)$$

Покажем, что, если функции $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ непрерывны на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$, удовлетворяют неравенствам

$$|\bar{y}_i(t) - y_{0i}| \leqslant A, \quad t \in [t_0-h, t_0+h], \quad i = 1,2,\dots,n \quad (2.55)$$

и системе интегральных уравнений (2.54), то эти функции являются решением задачи Коши (2.51), (2.52) на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$.

Действительно, из неравенств (2.55) следует, что

$$(t, \bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)) \in \Pi_{n+1} \text{ при } t \in [t_0-h, t_0+h].$$

Положив в (2.54) $t = t_0$, получим, что $\bar{y}_i(t)$ удовлетворяет условиям (2.52). Дифференцируя (2.54) по t, убеждаемся в том, что выполнены уравнения (2.51).

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что существуют функции $\bar{y}_i(t)$ непрерывные на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$, удовлетворяющие неравенствам (2.55) и системе интегральных уравнений (2.54).

Докажем существование таких функций $\bar{y}_i(t)$, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательности функций $y_1^k(t), y_2^k(t), \dots, y_n^k(t)$, $k = 0,1,2,\dots$ таких, что

$$y_i^{k+1}(t) = y_{0i} + \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1^k(\tau), y_2^k(\tau), \dots, y_n^k(\tau))d\tau, \quad i = 1,2,\dots,n, \quad (2.56)$$

$$y_i^0(t) = y_{0i}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Докажем, что все $y_i^k(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ и удовлетворяют неравенству

$$|y_i^k(t) - y_{0i}| \leqslant A, \quad t \in [t_0-h, t_0+h]. \quad (2.57)$$

Для $y_i^0(t)$ это верно. Предположим, что это верно для $y_i^m(t)$ и покажем, что это верно для $y_i^{m+1}(t)$. Так как все функции $f_i(t,y_1,y_2,\dots,y_n)$ непрерывны в Π_{n+1}, то из (2.56) следует, что $y_i^{m+1}(t)$ определены и непрерывны на $[t_0-h, t_0+h]$. Покажем, что

$$|y_i^{m+1}(t) - y_{0i}| \leqslant A, \quad t \in [t_0-h, t_0+h].$$

Эти неравенства следуют из определения (2.56). Действительно,

$$|y_i^{m+1}(t) - y_{0i}| \leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} |f_i(\tau, y_1^m(\tau), y_2^m(\tau), \dots, y_n^m(\tau))|d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} M d\tau\right| \leqslant M|t-t_0| \leqslant Mh \leqslant A, \quad i = 1,2,\dots,n, \quad t \in [t_0-h, t_0+h],$$

что и требовалось доказать.

Покажем, что для всех $i = 1,2,\dots,n$ и $k = 0,1,\dots$ на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ справедливы оценки

$$|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \leqslant A(nL)^k \frac{|t-t_0|^k}{k!}. \quad (2.58)$$

При $k = 0$ это верно, так как

$$|y_i^1(t) - y_i^0(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} |f_i(\tau, y_1^0(\tau), y_2^0(\tau), \dots, y_n^0(\tau))|d\tau\right| \leqslant Mh \leqslant A.$$

Пусть неравенство (2.58) справедливо для $k = m-1$. Покажем, что оно выполнено для $k = m$:

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} |f_i(\tau, y_1^m(\tau), y_2^m(\tau), \dots, y_n^m(\tau)) -\right.$$

$$\left. - f_i(\tau, y_1^{m-1}(\tau), y_2^{m-1}(\tau), \dots, y_n^{m-1}(\tau))|d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} L\Big(|y_1^m(\tau) - y_1^{m-1}(\tau)| + |y_2^m(\tau) - y_2^{m-1}(\tau)| + \dots\right.$$

$$\left. \dots + |y_n^m(\tau) - y_n^{m-1}(\tau)|\Big)d\tau\right|.$$

Используя предположение индукции, имеем

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} A(nL)^m \frac{|\tau-t_0|^{m-1}}{(m-1)!}d\tau\right| \leqslant A(nL)^m \frac{|t-t_0|^m}{m!}.$$

Следовательно, неравенство (2.58) доказано по индукции.

Рассмотрим на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ функциональные ряды

$$y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} (y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Из (2.58) следует, что на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ справедливы оценки

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leqslant A(nL)^m \frac{h^m}{m!}, \quad m = 0,1,\dots$$

Учитывая эти оценки, получим, что функциональные ряды сходятся равномерно на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$. Следовательно, последовательности непрерывных функций

$$y_i^k(t) = y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{k-1} (y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)), \quad i = 1,2,\dots,n$$

сходятся равномерно на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ к непрерывным функциям $\bar{y}_i(t)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенствах (2.57), получим, что функции $\bar{y}_i(t)$ удовлетворяют неравенствам (2.55).

Переходя к пределу при в формулах (2.56), получим, что функции $\bar{y}_i(t)$ являются решением системы интегральных уравнений (2.54), а значит и задачи (2.51), (2.52). Теорема доказана. □

Глава 3

Общая теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

3.1. Комплекснозначные решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка и системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Комплекснозначной функцией действительного аргумента $t \in [a,b]$ называется функция $y(t)$ такая, что $y(t) = u(t) + iv(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ – действительные функции. Комплекснозначная функция $y(t)$ непрерывна на $[a,b]$, если $u(t)$ и $v(t)$ непрерывны на $[a,b]$. Комплекснозначная функция $y(t)$ дифференцируема на $[a,b]$, если $u(t)$ и $v(t)$ дифференцируемы на $[a,b]$, при этом $y'(t) = u'(t) + iv'(t)$. Аналогично определяются производные более высокого порядка функции $y(t)$.

Комплекснозначные решения линейных дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами возникают также как комплексные числа при решении алгебраических уравнений с действительными коэффициентами.

Пример 3.1.1. *Требуется найти решение дифференциального уравнения*

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0. \quad (3.1)$$

Ищем решение этого уравнения в виде $y(t) = e^{\lambda t}$, где λ – неизвестная постоянная. Подставляя это представление в уравнение (3.1) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Это уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_1 = -1+2i, \lambda_2 = -1-2i$. Как известно, если комплексное число $z = x+iy$, то $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Следовательно, уравнение (3.1) имеет два комплекснозначных решения

$$y_1(t) = e^{-t}\cos 2t + ie^{-t}\sin 2t, \quad y_2(t) = e^{-t}\cos 2t - ie^{-t}\sin 2t. \quad (3.2)$$

Перейдем к определению комплекснозначного решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ уравнение

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t) \quad (3.3)$$

с действительными коэффициентами $a_k(t)$ и комплекснозначной функцией $f(t) = g(t) + ih(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – действительные функции, $a_0(t) \neq 0$ на $[a,b]$.

Определение 3.1.1. *Комплекснозначная функция $y(t) = u(t) + iv(t)$ называется решением уравнения (3.3) на отрезке $[a,b]$, если функции $u(t)$ и $v(t)$ n раз непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$ и удовлетворяют на $[a,b]$ уравнениям*

$$a_0(t)u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)u'(t) + a_n(t)u(t) = g(t), \quad (3.4)$$
$$a_0(t)v^{(n)}(t) + a_1(t)v^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)v'(t) + a_n(t)v(t) = h(t). \quad (3.5)$$

Рассмотрим задачу Коши для комплекснозначных решений уравнения (3.3). Требуется определить решение уравнения (3.3) такое, что

$$y^{(m)}(t_0) = y_{0m}, \quad m = 0,1,\dots,n-1, \quad (3.6)$$

где y_{0m} – заданные комплексные числа $y_{0m} = u_{0m} + iv_{0m}$, $u_{0m}, v_{0m} \in \mathbb{R}$, а t_0 – некоторая фиксированная точка отрезка $[a,b]$.

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (3.3), (3.6).

Теорема 3.1.1. *Пусть функции $a_k(t)$, $k = 0,1,\dots,n$, $g(t)$ и $h(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $a_0(t) \neq 0$, $t \in [a,b]$.*

Тогда существует единственная функция $y(t)$, являющаяся решением задачи Коши (3.3), (3.6) на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3.4) с начальными условиями

$$u^{(m)}(t_0) = u_{0m}, \quad m = 0,1,\dots,n-1. \quad (3.7)$$

По теореме 2.3.5 из параграфа 2.3.6 задача Коши (3.4), (3.7) имеет единственное решение $u(t)$. Аналогично задача Коши для уравнения (3.5) с начальными условиями

$$v^{(m)}(t_0) = v_{0m}, \quad m = 0,1,2,\dots,n-1 \quad (3.8)$$

имеет единственное решение $v(t)$. Тогда комплекснозначная функция $y(t) = u(t) + iv(t)$ является решением задачи Коши (3.3), (3.6) на отрезке $[a,b]$. Единственность решения задачи Коши (3.3), (3.6) следует из единственности решения задач Коши (3.4), (3.7) и (3.5), (3.8). Теорема 3.1.1 доказана. □

Следствие 3.1.1. *Если функция $f(t)$ в уравнении (3.3) действительна (то есть $h(t) = 0$) и начальные данные в (3.6) действительны (то есть $v_{0m} = 0$, $m = 0,1,\dots,n-1$), то задача Коши (3.3), (3.6) имеет только действительное решение.*

Определим комплекснозначное решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} y_1'(t) &=& a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + f_1(t),\\ y_2'(t) &=& a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \dots + a_{2n}(t)y_n(t) + f_2(t),\\ &\dots&\\ y_n'(t) &=& a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + f_n(t), \end{cases} \quad (3.9)$$

где функции $a_{kj}(t)$ – действительны, а $f_k(t) = g_k(t) + ih_k(t)$ – комплекснозначны, $k,j = 1,2,\dots,n$.

Определение 3.1.2. *Комплекснозначная вектор функция*

$$\overline{y}(t) = (u_1(t) + iv_1(t), u_2(t) + iv_2(t), \dots, u_n(t) + iv_n(t))^\top$$

называется решением системы (3.9), если $u_k(t)$, $v_k(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, $k = 1,2,\dots,n$, и

$$\begin{cases} u_1'(t) &=& a_{11}(t)u_1(t) + a_{12}(t)u_2(t) + \dots + a_{1n}(t)u_n(t) + g_1(t),\\ u_2'(t) &=& a_{21}(t)u_1(t) + a_{22}(t)u_2(t) + \dots + a_{2n}(t)u_n(t) + g_2(t),\\ &\dots&\\ u_n'(t) &=& a_{n1}(t)u_1(t) + a_{n2}(t)u_2(t) + \dots + a_{nn}(t)u_n(t) + g_n(t), \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} v_1'(t) &=& a_{11}(t)v_1(t) + a_{12}(t)v_2(t) + \dots + a_{1n}(t)v_n(t) + h_1(t),\\ v_2'(t) &=& a_{21}(t)v_1(t) + a_{22}(t)v_2(t) + \dots + a_{2n}(t)v_n(t) + h_2(t),\\ &\dots&\\ v_n'(t) &=& a_{n1}(t)v_1(t) + a_{n2}(t)v_2(t) + \dots + a_{nn}(t)v_n(t) + h_n(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

для $t \in [a,b]$.

Пусть задано начальное условие

$$y_k(t_0) = y_{0k} = u_{0k} + iv_{0k}, \quad (3.12)$$

где u_{0k}, v_{0k} – действительные числа, $k = 1,2,\dots,n$.

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (3.9), (3.12).

Теорема 3.1.2. *Пусть $a_{kj}(t)$, $g_k(t)$, $h_k(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $k,j = 1,2,\dots,n$. Тогда существует единственная вектор функция $\bar{y}(t)$, являющаяся решением задачи Коши (3.9), (3.12) на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для системы (3.10) с начальным условием

$$u_k(t_0) = u_{0k}, \quad k = 1,2,\dots,n. \quad (3.13)$$

По теореме 2.3.4 из параграфа 2.3.5 задача Коши (3.10), (3.13) имеет единственное решение $(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$.

Аналогично задача Коши для системы (3.11) с начальными условиями

$$v_k(t_0) = v_{0k}, \quad k = 1,2,\dots,n. \quad (3.14)$$

имеет единственное решение $(v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))$. Тогда комплекснозначная вектор функция

$$\bar{y}(t) = (u_1(t) + iv_1(t), u_2(t) + iv_2(t), \dots, u_n(t) + iv_n(t))^\top$$

будет решением задачи Коши (3.9), (3.12) на отрезке $[a,b]$. Единственность решения задачи Коши (3.9), (3.12) следует из единственности решений задач Коши (3.10), (3.13) и (3.11), (3.14). Теорема 3.1.2 доказана. □

Следствие 3.1.2. *Если функции $f_k(t)$ в системе (3.9) действительны (то есть $h_k(t) = 0$) и начальные данные в (3.12) действительны (то есть $v_{0k} = 0$, $k = 1,2,\dots,n$), то задача Коши (3.9), (3.12) имеет только действительное решение.*

3.2. Общие свойства линейного дифференциального уравнения n-го порядка

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t) \quad (3.15)$$

с непрерывными на отрезке $[a,b]$ действительными коэффициентами $a_k(t)$, $k = 0,1,\dots,n$, $a_0(t) \neq 0$, $t \in [a,b]$ и непрерывной на отрезке $[a,b]$ комплекснозначной функцией $f(t)$.

Введем линейный дифференциальный оператор n-го порядка.

Определение 3.2.1. *Линейным дифференциальным оператором n-го порядка называется оператор*

$$\mathcal{L}y = a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t). \quad (3.16)$$

Оператор $\mathcal{L}$ определен для всех n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $y(t)$, причем $\mathcal{L}y(t) \in C[a,b]$. Используя это определение, уравнение (3.15) можно записать в виде

$$\mathcal{L}y = f(t), \quad t \in [a,b].$$

Если функция $f(t)$ равна нулю на отрезке $[a,b]$, то уравнение (3.15) называется *однородным*, а если функция $f(t)$ не равна нулю на отрезке $[a,b]$, то уравнение (3.15) называется *неоднородным*.

Теорема 3.2.1. *Если функции $y_k(t)$, $k = 1,2,\dots,m$ являются решениями уравнений $\mathcal{L}y_k = f_k(t)$, то функция $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$, где c_k – комплексные постоянные, является решением уравнения $\mathcal{L}y = f(t)$, где $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k f_k(t)$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы следует из линейности оператора $\mathcal{L}$, которая является следствием линейности оператора дифференцирования:

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathcal{L}y_k = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t) = f(t), \quad t \in [a,b].$$

□

Следствие 3.2.1. *Линейная комбинация решений однородного уравнения является решением однородного уравнения. Разность двух решений неоднородного уравнения с одинаковой правой частью есть решение однородного уравнения.*

Теорема 3.2.2. *Решение задачи Коши*

$$\mathcal{L}y = f(t), \quad y(t_0) = y_{00}, \quad y'(t_0) = y_{01}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$$

представимо в виде суммы $y(t) = v(t) + w(t)$, где функция $v(t)$ является решением задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$\mathcal{L}v = f(t), \quad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0, \quad \dots, \quad v^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

а функция $w(t)$ является решением задачи Коши для однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями

$$\mathcal{L}w = 0, \quad w(t_0) = y_{00}, \quad w'(t_0) = y_{01}, \quad \dots, \quad w^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}.$$

Доказательство. Сумма $y(t) = v(t) + w(t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению в силу теоремы 3.2.1. Для начальных условий имеем равенства

$$y^{(k)}(t_0) = v^{(k)}(t_0) + w^{(k)}(t_0) = 0 + y_{0k} = y_{0k}, \quad k = 0,1,\dots,n-1.$$

□

Теорема 3.2.3. *Решение задачи Коши для однородного уравнения*

$$\mathcal{L}y = 0, \quad y(t_0) = y_{00}, \quad y'(t_0) = y_{01}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$$

представимо в виде суммы

$$y(t) = \sum_{m=0}^{n-1} y_m(t) y_{0m},$$

где функции $y_m(t)$ являются решениями задач Коши:

$$\mathcal{L}y_m = 0, \quad y_m^{(m)}(t_0) = 1, \quad y_m^{(k)}(t_0) = 0, \quad \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}\backslash\{m\}.$$

Доказательство. Функция $y(t)$ является решением однородного уравнения как линейная комбинация решений $y_m(t)$ однородного уравнения с постоянными коэффициентами в силу теоремы 3.2.1. Осталось убедиться в выполнении начальных условий:

$$y^{(k)}(t_0) = \sum_{m=0}^{n-1} y_m^{(k)}(t_0) y_0^{(m)} = y_k^{(k)}(t_0) y_{0k} = y_{0k}, \quad k = 0,1,\dots,n-1.$$

□

3.3. Линейная зависимость скалярных функций и определитель Вронского

3.3.1. Линейная зависимость произвольных скалярных функций

В этом параграфе рассматриваются произвольные скалярные функции

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \dots, \quad \varphi_m(t),$$

определенные на отрезке $[a,b]$ и принимающие комплексные значения. Никакая связь с решениями дифференциальных уравнений пока не предполагаются.

Определение 3.3.1. *Скалярные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a,b]$, если найдутся такие комплексные константы $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1,\dots,m$, $\sum\limits_{k=1}^{m} |c_k| > 0$, что справедливо равенство*

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) = 0, \quad \forall t \in [a,b]. \quad (3.17)$$

Если же равенство (3.17) выполнено только для тривиального набора констант $c_k = 0$, $k = 1,2,\dots,n$, то скалярные функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\dots$, $\varphi_m(t)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a,b]$.

Замечание 3.3.1. *Из определения следует, что, если функции $\varphi_k(t)$ действительны, то при определении их линейной зависимости и независимости достаточно рассматривать действительные значения постоянных c_k, $k = 1,2,\dots,m$.*

Пример 3.3.1. *Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ функции*

$$\varphi_1(t) = t^3, \quad \varphi_2(t) = t^2|t|.$$

Если $0 < a < b$, то на рассматриваемом отрезке $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ и функции линейно зависимы на $[a,b]$.

Если же $a < 0 < b$, то, положив $t = d = \min\{|a|, b\}$ и $t = -d$ в равенстве $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0$, получим систему $c_1d^3 + c_2d^3 = 0$, $c_1d^3 - c_2d^3 = 0$, из которой следует, что $c_1 = c_2 = 0$, а значит $\varphi_1(t) = t^3$ и $\varphi_2(t) = t^2|t|$ линейно независимы на $[a,b]$.

Замечание 3.3.2. *Пример 3.3.1 показывает, что линейная зависимость и независимость системы функций в общем случае зависит от того, на каком отрезке рассматривается эта система.*

Определение 3.3.2. *Определителем Вронского системы функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\dots$, $\varphi_m(t)$, состоящей из $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций, называется зависящий от переменной $t \in [a,b]$ определитель*

$$W[\varphi_1,\dots,\varphi_m](t) = \det\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_m(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_m'(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Необходимое условие линейной зависимости скалярных функций устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Если система $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ скалярных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ является линейно зависимой на отрезке $[a,b]$, то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этом отрезке:*

$$W[\varphi_1,\dots,\varphi_m](t) = 0, \quad \forall t \in [a,b].$$

Доказательство. Так как функции $\varphi_k(t)$ линейно зависимы на $[a,b]$, то существует нетривиальный набор констант $c_1, c_2, \dots, c_n$, для которого на отрезке $[a,b]$ справедливо равенство (3.17). В этом равенстве допустимо почленное дифференцирование до порядка $m-1$ включительно:

$$c_1\varphi_1^{(k)}(t) + \dots + c_m\varphi_m^{(k)}(t) = 0, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \quad t \in [a,b]. \quad (3.18)$$

Из (3.18) следует, что вектор-столбцы определителя Вронского линейно зависимы для всех $t \in [a,b]$. Следовательно, этот определитель равен нулю для всех $t \in [a,b]$. □

Следствие 3.3.1. *Если для системы $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ скалярных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ определитель Вронского отличен от нуля в некоторой точке $t_0 \in [a,b]$,*

$$W[\varphi_1,\dots,\varphi_m](t_0) \neq 0,$$

то эта система является линейно независимой на отрезке $[a,b]$.

Отметим, что равенство нулю определителя Вронского является, вообще говоря, только необходимым условием линейной зависимости скалярных функций. Из равенства нулю определителя Вронского не вытекает их линейная зависимость.

Пример 3.3.2. *Для $m = 2$ рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ две функции, имеющие нулевой определитель Вронского:*

$$\varphi_1(t) = t^3, \quad \varphi_2(t) = t^2|t|, \quad W[\varphi_1,\varphi_2](t) = \det\begin{pmatrix} t^3 & t^2|t|\\ 3t^2 & 3t|t| \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Однако, как показано выше в примере 3.3.1, эти функции являются линейно независимыми на отрезке $[-1,1]$.

3.3.2. Линейная зависимость и независимость решений линейного однородного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n с непрерывными на отрезке $[a,b]$ действительными коэффициентами $a_j(t)$, $j = 0,\dots,n$, $a_0(t) \neq 0$ на $[a,b]$:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0. \quad (3.19)$$

Рассмотрим систему скалярных функций $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, являющихся решением линейного однородного уравнения (3.19) порядка n. Подчеркнем, что количество функций в рассматриваемой системе совпадает с порядком уравнения. Исследуем вопрос о связи свойства линейной зависимости решений линейного однородного дифференциального уравнения и значения определителя Вронского. В отличие от случая произвольной системы функции для системы решений однородного дифференциального уравнения (3.19) поведение определителя Вронского является критерием линейной зависимости или независимости системы решений. Справедлива следующая теорема, которую можно назвать теоремой об альтернативе для определителя Вронского.

Теорема 3.3.2. *Для решений $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейного однородного уравнения (3.19) на отрезке $[a,b]$ справедлива следующая альтернатива:*

- ◃ *либо $W[y_1,\dots,y_n](t) \equiv 0$ на $[a,b]$ и функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейно зависимы на этом отрезке;*
- ◃ *либо $W[y_1,\dots,y_n](t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$ и функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейно независимы на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть в какой-то точке t_0 определитель Вронского, составленный из функций $y_k(t)$, равен нулю, то есть $W[y_1,\dots,y_n](t_0) = 0$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$:

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) + \dots + c_ny_n(t_0) &=& 0,\\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) + \dots + c_ny_n'(t_0) &=& 0,\\ &\dots&\\ c_1y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_ny_n^{(n-1)}(t_0) &=& 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Так как определитель этой системы равен определителю Вронского и равен нулю ($W[y_1,\dots,y_n](t_0) = 0$), то эта система имеет нетривиальное решение $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \dots, \widetilde{c}_n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} |\widetilde{c}_k| > 0$.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t).$$

Из теоремы 3.2.1 следует, что эта функция является решением однородного дифференциального уравнения (3.19), а из (3.20) следует, что она удовлетворяет начальным условиям

$$\widetilde{y}^{(m)}(t_0) = 0, \quad m = 0,1,\dots,n-1.$$

Это означает, что функция $\widetilde{y}(t)$ является решением однородного дифференциального уравнения (3.19) и удовлетворяет нулевым начальным условиям в точке t_0. По теореме единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения эта функция равна нулю на отрезке $[a,b]$. Следовательно,

$$\widetilde{y}(t)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{c}_k y_k(t)=0, \quad t\in[a,b],$$

и функции $y_k(t)$, $k=1,2,\ldots,n$ линейно зависимы. Тогда из теоремы 3.3.1 следует, что определитель Вронского, составленный из этих функций, равен нулю на отрезке $[a,b]$.

Пусть существует точка $\widehat{t}\in[a,b]$ такая, что $W[y_1,\ldots,y_n](\widehat{t}\,)\neq 0$. Тогда из предыдущего следует, что определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a,b]$, и функции $y_k(t)$, $k=1,2,\ldots,n$ линейно независимы на этом отрезке. □

Замечание 3.3.3. *В силу доказанной теоремы рассмотренные в примере 3.3.2 дважды непрерывно дифференцируемые линейно независимые на отрезке $[-1,1]$ функции*

$$\varphi_1(t)=t^3, \quad \varphi_2(t)=t^2|t|$$

не могут являться решениями никакого линейного однородного уравнения второго порядка

$$a_0(t)y''(t)+a_1(t)y'(t)+a_2(t)y(t)=0, \quad t\in[-1,1]$$

с непрерывными коэффициентами $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $a_0(t)\neq 0$, поскольку $W[\varphi_1,\varphi_2](t)\equiv 0$ на отрезке $[-1,1]$.

3.4. Фундаментальная система решений и общее решение линейного дифференциального уравнения

3.4.1. Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения

Определение 3.4.1. *Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.19) на отрезке $[a,b]$ называется система из n линейно независимых на данном отрезке решений этого уравнения.*

Теорема 3.4.1. *У любого линейного однородного уравнения (3.19) существует фундаментальная система решений на $[a,b]$.*

Доказательство. Рассмотрим постоянную матрицу B с элементами b_{ij}, $i,j=1,2,\ldots,n$ такую, что $\det B\neq 0$. Обозначим через $y_j(t)$ решения задачи Коши для уравнения (3.19) с начальными условиями

$$y_j(t_0)=b_{1j},\ y_j'(t_0)=b_{2j},\ \ldots,\ y_j^{(n-1)}(t_0)=b_{nj}, \quad j=1,2,\ldots,n. \tag{3.21}$$

По теореме 2.3.5 существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка функции $y_j(t)$ существуют и определены однозначно. Составленный из них определитель Вронского $W[y_1,\ldots,y_n](t)$, в силу условий (3.21), таков, что $W[y_1,\ldots,y_n](t_0)=\det B\neq 0$. Следовательно, по теореме 3.3.2 он не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a,b]$, и функции $y_j(t)$ линейно независимы на отрезке $[a,b]$. Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.19) и теорема доказана. □

Замечание 3.4.1. *Из доказательства теоремы 3.4.1 следует, что фундаментальная система решений уравнения (3.19) определена неоднозначно. Действительно, выбирая различные матрицы B такие, что $\det B\neq 0$, мы получим различные фундаментальные системы решений уравнения (3.19).*

Замечание 3.4.2. *Так как коэффициенты уравнения $a_j(t)$ вещественны, то фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (3.19) также может быть выбрана вещественной.*

3.4.2. Общее решение линейного однородного уравнения

Определение 3.4.2. *Общим решением линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.19) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение уравнения (3.19) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 3.4.2. *Пусть $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (3.19) на отрезке $[a,b]$. Тогда общее решение этого уравнения на рассматриваемом отрезке имеет вид*

$$y_{OO}(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\cdots+c_ny_n(t), \quad \forall c_j\in\mathbb{C}. \tag{3.22}$$

Доказательство. Так как линейная комбинация решений однородного уравнения (3.19) является решением этого уравнения, то при любых значениях постоянных c_k функция $y_{OO}(t)$, определяемая формулой (3.22), является решением линейного однородного дифференциального уравнения (3.19).

Покажем теперь, что любое решение уравнения (3.19) может быть получено из (3.22) в результате выбора значений постоянных c_k. Пусть $\widetilde{y}(t)$ – некоторое решение уравнения (3.19). Рассмотрим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k

$$\begin{array}{rcl}
c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)+\cdots+c_ny_n(t_0) & = & \widetilde{y}(t_0),\\
c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)+\cdots+c_ny_n'(t_0) & = & \widetilde{y}'(t_0),\\
 & \cdots & \\
c_1y_1^{(n-1)}(t_0)+c_2y_2^{(n-1)}(t_0)+\cdots+c_ny_n^{(n-1)}(t_0) & = & \widetilde{y}^{(n-1)}(t_0),
\end{array} \tag{3.23}$$

где t_0 – некоторая точка отрезка $[a,b]$. Определитель этой системы равен определителю Вронского в точке t_0 и не равен нулю, так как решения $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ линейно независимы. Следовательно, система (3.23) имеет единственное решение $\widetilde{c}_1,\widetilde{c}_2,\ldots,\widetilde{c}_n$.

Рассмотрим функцию

$$\widehat{y}(t)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{c}_ky_k(t).$$

Эта функция является решением уравнения (3.19). Так как постоянные $\widetilde{c}_1,\widetilde{c}_2,\ldots,\widetilde{c}_n$ представляют собой решение системы (3.23), то функция $\widehat{y}(t)$ такова, что

$$\widehat{y}^{(k)}(t_0)=\widetilde{y}^{(k)}(t_0), \quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Следовательно, функции $\widehat{y}(t)$ и $\widetilde{y}(t)$ являются решениями уравнения (3.19) и удовлетворяют одним и тем же начальным условиям в точке t_0. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши эти функции должны совпадать:

$$\widetilde{y}(t)=\widehat{y}(t)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{c}_ky_k(t).$$

Теорема 3.4.2 доказана. □

Следствие 3.4.1. *Из теоремы 3.4.2 следует, что уравнение (3.19) не может иметь более n линейно независимых решений.*

Покажем, что справедливость этого утверждения существенно связана с тем, что мы предположили, что коэффициент $a_0(t)$ всюду отличен от нуля на отрезке $[a,b]$.

Пример 3.4.1. *На отрезке $[-1,3]$ рассмотрим три функции*

$$y_1(t)=t, \quad y_2(t)=t^3, \quad y_3(t)=|t|^3.$$

Эти функции линейно независимы на рассматриваемом отрезке и удовлетворяют линейному однородному уравнению второго порядка

$$t^2y''-3ty'+3y=0, \quad t\in[-1,3],$$

с коэффициентом $a_0(t)=t^2$, который обращается в ноль при $t=0\in[-1,3]$

Таким образом, без предположения $a_0(t)\neq 0\ \forall t\in[a,b]$ теорема 3.4.2 неверна.

Замечание 3.4.3. *Так как все коэффициенты уравнения (3.19) вещественны, то и общее решение естественно искать в классе вещественных функций. Тогда при выборе вещественной фундаментальной системы решений (см. замечание к теореме 3.4.1) формула (3.22) для произвольных $c_j\in\mathbb{R}$ дает общее вещественнозначное решение линейного однородного уравнения.*

3.4.3. Общее решение линейного неоднородного уравнения

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с непрерывными на отрезке $[a,b]$ действительными коэффициентами

$$a_j(t), \quad j=0,\ldots,n, \quad a_0(t)\neq 0, \quad t\in[a,b]$$

и непрерывной на $[a,b]$ правой частью $f(t)$:

$$a_0(t)y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}(t)y'(t)+a_n(t)y(t)=f(t). \tag{3.24}$$

Перейдем к описанию общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.24). Определение общего решения этого уравнения аналогично определению общего решения однородного уравнения.

Определение 3.4.3. *Общим решением линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.24) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение уравнения (3.24) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 3.4.3. *Пусть $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (3.19) на отрезке $[a,b]$, $y_H(t)$ – некоторое (частное) решение неоднородного уравнения (3.24). Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения (3.24) на рассматриваемом отрезке имеет вид*

$$\begin{aligned}y_{OH}(t)&=y_H(t)+y_{OO}(t)=\\&=y_H(t)+c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\cdots+c_ny_n(t),\end{aligned} \tag{3.25}$$

где $c_1,c_2,\ldots,c_n$ – произвольные комплексные постоянные.

Доказательство. Для любого набора констант $c_j\in\mathbb{C}$ формула (3.25) определяет решение линейного неоднородного уравнения (3.24) в силу линейности уравнения. Согласно определению общего решения осталось показать, что выбором констант в формуле (3.25) можно получить любое наперед заданное решение (3.24), то есть для любого решения $\widetilde{y}(t)$ неоднородного уравнения (3.24) найдутся константы $\widetilde{c}_1,\widetilde{c}_2,\ldots,\widetilde{c}_n$ такие, что на отрезке $[a,b]$ будет выполнено равенство

$$\widetilde{y}(t)=y_H(t)+\widetilde{c}_1y_1(t)+\widetilde{c}_2y_2(t)+\cdots+\widetilde{c}_ny_n(t). \tag{3.26}$$

Пусть $\widetilde{y}(t)$ – решение неоднородного уравнения (3.24). Разность $y(t)=\widetilde{y}(t)-y_H(t)$ двух решений линейного неоднородного уравнения (3.24) является решением однородного уравнения (3.19). По теореме 3.4.2 об общем решении линейного однородного уравнения найдутся комплексные константы $\widetilde{c}_j$ такие, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство $y(t)=\widetilde{c}_1y_1(t)+\widetilde{c}_2y_2(t)+\cdots+\widetilde{c}_ny_n(t)$, а вместе с ним и искомое равенство (3.26). □

3.4.4. Метод вариации постоянных

Из теоремы 3.4.3 следует, что для построения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (3.24) достаточно знать фундаментальную систему решений однородного уравнения(3.19) и какое-нибудь решение неоднородного уравнения (3.24). Рассмотрим метод построения решения $y_H(t)$ неоднородного уравнения (3.24) в случае, когда известна фундаментальная система решений однородного уравнения (3.19). В этом методе частное решение ищется в виде, повторяющем структуру (3.22) общего решения однородного уравнения, в котором константы $c_1,c_2,\ldots,c_n$ заменены на пока произвольные непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции $c_1(t),c_2(t),\ldots,c_n(t)$, а именно:

$$y_H(t)=c_1(t)y_1(t)+c_2(t)y_2(t)+\cdots+c_n(t)y_n(t). \tag{3.27}$$

Пусть производные $c_k'(t)$ функций $c_k(t)$ из представления (3.27) определяются для каждого $t\in[a,b]$ из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{array}{rcl}
c_1'(t)y_1(t)+c_2'(t)y_2(t)+\cdots+c_n'(t)y_n(t) & = & 0,\\
c_1'(t)y_1^{(1)}(t)+c_2'(t)y_2^{(1)}(t)+\cdots+c_n'(t)y_n^{(1)}(t) & = & 0,\\
 & \cdots & \\
c_1'(t)y_1^{(n-2)}(t)+c_2'(t)y_2^{(n-2)}(t)+\cdots+c_n'(t)y_n^{(n-2)}(t) & = & 0,\\
c_1'(t)y_1^{(n-1)}(t)+c_2'(t)y_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) & = & \dfrac{f(t)}{a_0(t)}.
\end{array}$$

Так как функции $y_k(t)$ образуют фундаментальную систему решений, то определитель системы для неизвестных $c_k'(t)$ не равен нулю ни в одной точке, и система имеет единственное решение

$$c_k'(t)=g_k(t), \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Интегрируя, найдем функции $c_k(t)=\int\limits_{t_0}^{t}g_k(\tau)d\tau$.

Выражения для производных частного решения из (3.27) принимают вид

$$\begin{array}{rcl}
y_H'(t) & = & c_1(t)y_1'(t)+c_2(t)y_2'(t)+c_n(t)y_n'(t),\\
y_H''(t) & = & c_1(t)y_1''(t)+c_2(t)y_2''(t)+c_n(t)y_n''(t),\\
\cdots & & \\
y_H^{(n-1)}(t) & = & c_1(t)y_1^{(n-1)}(t)+c_2(t)y_2^{(n-1)}(t)+c_n(t)y_n^{(n-1)}(t),
\end{array}$$

$$\begin{aligned}y_H^{(n)}(t)&=c_1(t)y_1^{(n)}(t)+c_2(t)y_2^{(n)}(t)+c_n(t)y_n^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k'(t)y_k^{(n-1)}(t)=\\&=c_1(t)y_1^{(n)}(t)+c_2(t)y_2^{(n)}(t)+c_n(t)y_n^{(n)}(t)+\frac{f(t)}{a_0(t)}.\end{aligned}$$

Таким образом, в методе вариации постоянных вычисление производных искомого частного решения (3.27) до порядка $(n-1)$ включительно происходит так, как будто бы функции $c_j(t)$ не зависят от t и являются константами.

Подставив функцию $y_H(t)$ в левую часть уравнения (3.24), имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}y_H(t)&=a_0(t)\cdot\frac{f(t)}{a_0(t)}+a_0(t)\sum_{k=1}^{n}c_k(t)y_k^{(n)}(t)+a_1(t)\sum_{k=1}^{n}c_k(t)y_k^{(n-1)}(t)+\ldots\\&\cdots+a_{n-1}(t)\sum_{k=1}^{n}c_k(t)y_k'(t)+a_n(t)\sum_{k=1}^{n}c_k(t)y_k(t).\end{aligned}$$

Произведя перегруппировку слагаемых и приняв во внимание определение (3.16) оператора $\mathcal{L}$, получим

$$\mathcal{L}y_H(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\mathcal{L}y_k(t)=f(t)+0=f(t), \quad t\in[a,b],$$

поскольку функции $y_k(t)$, $k=1,2,\ldots,n$ являются решениями однородного уравнения (3.19), $\mathcal{L}y_k(t)=0$. Итак, мы убедились, что построенная функция

$$y_H(t)=c_1(t)y_1(t)+c_2(t)y_2(t)+\cdots+c_n(t)y_n(t)=\sum_{k=1}^{n}y_k(t)\int\limits_{t_0}^{t}g_k(\tau)d\tau$$

является решением неоднородного уравнения (3.24).

3.4.5. Построение фундаментальной системы решений для линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка с вещественными постоянными коэффициентами $a_j\in\mathbb{R}$, $j=0,\ldots,n$, $a_0\neq 0$:

$$a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)=0. \tag{3.28}$$

Это уравнение можно записать в операторном виде $\mathcal{L}y=0$, где дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}y=a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t).$$

Сопоставим дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ многочлен

$$M(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n. \tag{3.29}$$

Многочлен $M(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом*, а уравнение

$$M(\lambda)=0 \tag{3.30}$$

называется *характеристическим уравнением.*

Очевидно, что функция $\exp\{\lambda_0t\}$ является решением дифференциального уравнения (3.28) тогда и только тогда, когда λ_0 является корнем характеристического уравнения (3.30). Обозначим через $\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell$ попарно различные корни характеристического многочлена, $M(\lambda_j)=0$, а через $k_1,\ldots,k_\ell$ обозначим кратности этих корней, $k_1+\cdots+k_\ell=n$. Таким образом, справедливо равенство

$$M(\lambda)=a_0(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\lambda_\ell)^{k_\ell}. \tag{3.31}$$

Лемма 3.4.1. *Для любой n раз непрерывно дифференцируемой функции $g(t)$ и произвольного $\lambda\in\mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\mathcal{L}\Big(\exp\{\lambda t\}g(t)\Big)=\exp\{\lambda t\}\sum_{m=0}^{n}\frac{M^{(m)}(\lambda)g^{(m)}(t)}{m!}.$$

Доказательство. По формуле Лейбница

$$\begin{aligned}\frac{d^p}{dt^p}\Big(\exp\{\lambda t\}g(t)\Big)&=\sum_{m=0}^{p}C_n^p\Big(\frac{d^{p-m}}{dt^{p-m}}\exp\{\lambda t\}\Big)\Big(\frac{d^m}{dt^m}g(t)\Big)=\\&=\exp\{\lambda t\}\sum_{m=0}^{p}\frac{p(p-1)\ldots(p-(m-1))}{m!}\lambda^{p-m}g^{(m)}(t)=\\&=\exp\{\lambda t\}\sum_{m=0}^{p}\frac{d^m}{d\lambda^m}\Big(\lambda^p\Big)\frac{g^{(m)}(t)}{m!}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(\exp\{\lambda t\}g(t)\Big)&=\sum_{p=0}^{n}a_{n-p}\frac{d^p}{dt^p}\Big(\exp\{\lambda t\}g(t)\Big)=\\&=\exp\{\lambda t\}\sum_{p=0}^{n}a_{n-p}\sum_{m=0}^{p}\frac{d^m}{d\lambda^m}\Big(\lambda^p\Big)\frac{g^{(m)}(t)}{m!}\\&=\exp\{\lambda t\}\sum_{p=0}^{n}a_{n-p}\sum_{m=0}^{n}\frac{d^m}{d\lambda^m}\Big(\lambda^p\Big)\frac{g^{(m)}(t)}{m!},\end{aligned}$$

так как $d^m\lambda^p/d\lambda^m=0$, $m=p+1,\ldots,n$. Меняя порядок суммирования, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(\exp\{\lambda t\}g(t)\Big)&=\exp\{\lambda t\}\sum_{m=0}^{n}\frac{g^{(m)}(t)}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\Big(\sum_{p=0}^{n}a_{n-p}\lambda^p\Big)=\\&=\exp\{\lambda t\}\sum_{m=0}^{n}\frac{g^{(m)}(t)}{m!}M^{(m)}(\lambda).\end{aligned}$$

□

Лемма 3.4.2. *Для каждого корня λ_j характеристического уравнения (3.30) кратности k_j функции*

$$\exp\{\lambda_jt\}, \quad t\exp\{\lambda_jt\}, \quad \ldots, \quad t^{k_j-1}\exp\{\lambda_jt\}$$

являются решениями однородного уравнения (3.28).

Доказательство. Так как λ_j – корень уравнения (3.30) кратности k_j, то в силу (3.31) справедливо равенство

$$M(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)^{k_j}R(\lambda),$$

где $R(\lambda)$ – многочлен степени $n-k_j$. Ясно, что имеют место равенства

$$M^{(m)}(\lambda_j)=\frac{d^mM(\lambda)}{d\lambda^m}\Big|_{\lambda=\lambda_j}=0, \quad m=0,1,\ldots,k_j-1.$$

Поэтому из леммы 3.4.1 для $g(t)=t^p$, $p=0,1,\ldots,k_j-1$ имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(\exp\{\lambda_jt\}t^p\Big)&=\exp\{\lambda_jt\}\sum_{m=0}^{n}\frac{\big(t^p\big)^{(m)}}{m!}M^{(m)}(\lambda_j)=\\&=\exp\{\lambda_jt\}\sum_{m=k_j}^{n}\frac{\big(t^p\big)^{(m)}}{m!}M^{(m)}(\lambda_j)=0 \quad (\text{ так как } p<k_j).\end{aligned}$$

□

Таким образом, мы показали, что функции

$$\exp\{\lambda_jt\}, \quad t\exp\{\lambda_jt\}, \quad \ldots, \quad t^{k_j-1}\exp\{\lambda_jt\}, \quad j=1,\ldots,\ell. \tag{3.32}$$

являются решениями однородного дифференциального уравнения (3.28). Количество этих функций совпадает с порядком n дифференциального уравнения (3.28).

Теорема 3.4.4. *Система функций (3.32) составляет фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (3.28) на любом отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что система функций (3.32) является линейно независимой на любом отрезке $[a,b]$. Предположим, что нетривиальная линейная комбинация функций из системы (3.32) обращается тождественно в ноль на некотором отрезке:

$$\sum_{k=0}^{k_1-1}C_{1,k}t^k\exp\{\lambda_1t\}+\sum_{k=0}^{k_2-1}C_{2,k}t^k\exp\{\lambda_2t\}+\cdots+\sum_{k=0}^{k_\ell-1}C_{\ell,k}t^k\exp\{\lambda_\ell t\}\equiv 0,$$

или

$$P_1(t)\exp\{\lambda_1t\}+P_2(t)\exp\{\lambda_2t\}+\cdots+P_\ell(t)\exp\{\lambda_\ell t\}\equiv 0, \tag{3.33}$$

где степень многочлена $s_j=\deg P_j(t)\leqslant k_j-1$, $j=1,\ldots,\ell$. Без ограничения общности можно считать, что многочлен $P_\ell(t)$ нетривиален, $P_\ell(t)=p_\ell t^{s_\ell}+\ldots$, $p_\ell\neq 0$. После умножения (3.33) на $\exp\{-\lambda_1t\}$ получаем

$$P_1(t)+P_2(t)\exp\{(\lambda_2-\lambda_1)t\}+\cdots+P_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell-\lambda_1)t\}\equiv 0.$$

Дифференцируем в последнем равенстве почленно s_1+1 раз. Так как $\deg P_1(t)=s_1$, то $\dfrac{d^{s_1+1}P_1(t)}{dt^{s_1+1}}\equiv 0$. Для преобразования остальных слагаемых заметим, что

$$(P_j(t)\exp\{\mu t\})'=(\mu P_j(t)+P_j(t)')\exp\{\mu t\}, \quad \mu=\lambda_j-\lambda_1\neq 0,$$

то есть при дифференцировании в множителе перед экспонентой остается многочлен той же степени. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{d^{s_1+1}}{dt^{s_1+1}}\left(P_j(t)\exp\{(\lambda_j-\lambda_1)t\}\right)&=Q_j(t)\exp\{(\lambda_j-\lambda_1)t\},\\ \deg Q_j(t)=s_j, \quad Q_j(t)&=(\lambda_j-\lambda_1)^{s_1+1}p_jt^{s_j}+\ldots.\end{aligned}$$

В результате приходим к равенству

$$Q_2(t)\exp\{(\lambda_2-\lambda_1)t\}+\cdots+Q_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell-\lambda_1)t\}\equiv 0.$$

После умножения на $\exp\{(\lambda_1-\lambda_2)t\}$ и почленного дифференцирования полученного равенства s_2+1 раз имеем

$$\begin{aligned}R_3(t)\exp\{(\lambda_3-\lambda_2)t\}+\cdots+R_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell-\lambda_2)t\}\equiv 0, \quad \deg R_j(t)=s_j,\\ R_j(t)=(\lambda_j-\lambda_2)^{s_2+1}(\lambda_j-\lambda_1)^{s_1+1}p_jt^{s_j}+\ldots, \quad j=3,\ldots,\ell.\end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру, на последнем этапе получаем

$$\begin{aligned}&S_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell-\lambda_{\ell-1})t\}\equiv 0, \quad \deg S_\ell(t)=s_\ell,\\&S_\ell(t)=(\lambda_\ell-\lambda_{\ell-1})^{s_{\ell-1}+1}\ldots(\lambda_\ell-\lambda_2)^{s_2+1}(\lambda_\ell-\lambda_1)^{s_1+1}p_\ell t^{s_\ell}+\ldots.\end{aligned}$$

Однако полученное равенство противоречит нетривиальности многочлена $P_\ell(t)$ со старшим коэффициентом $p_\ell\neq 0$. Полученное противоречие обосновывает справедливость доказываемого утверждения о линейной независимости системы (3.32). □

3.4.6. Построение вещественной фундаментальной системы решений для линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

Так как все коэффициенты уравнения (3.28) вещественны, то фундаментальную систему решений можно также конструктивно построить в вещественном виде. Характеристический многочлен в (3.29) имеет вещественные коэффициенты. Как следует из курса линейной алгебры, его комплекснозначные корни идут комплексно сопряженными парами: $\lambda=\alpha+i\beta$, $\lambda^*=\alpha-i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Тогда в построенной фундаментальной системе решений (3.32) функции, отвечающие вещественным корням характеристического многочлена $M_n(\Lambda)$, являются вещественными, а отвечающие комплексным корням функции встречаются только комплексно сопряженными парами:

$$y(t)=t^s\exp\{\alpha t\}(\cos\beta t+i\sin\beta t), \quad y^*(t)=t^s\exp\{\alpha t\}(\cos\beta t-i\sin\beta t).$$

Заменим каждую пару таких функций соответствующими действительными и мнимыми частями:

$$\begin{array}{rcl}
y_R(t) & = & \mathrm{Re}\,y(t)=t^s\exp\{\alpha t\}\cos\beta t,\\
y_I(t) & = & \mathrm{Im}\,y(t)=t^s\exp\{\alpha t\}\sin\beta t.
\end{array} \tag{3.34}$$

Функции $y_R(t),y_I(t)$ являются решениями линейного однородного уравнения (3.28) как линейные комбинации решений этого уравнения.

Построенная таким образом совокупность состоит из n *вещественных* решений линейного однородного уравнения (3.28) и задает его фундаментальную систему решений над полем вещественных чисел. Для обоснования этого факта осталось убедиться в линейной независимости над полем вещественных чисел построенной системы на любом отрезке $[a,b]$. Предположим противное, то есть некоторая линейная комбинация с вещественными коэффициентами $r_j\in\mathbb{R}$ для построенных функций обращается в ноль на некотором отрезке $[a,b]$. Не ограничивая общности можно считать, что в такой линейной комбинации встречается сумма вида

$$\cdots+r_1y_R(t)+r_2y_I(t)+\cdots=0, \quad r_1^2+r_2^2>0.$$

Подставляя из (3.34) выражения для всех встречающихся пар через соответствующие комплексные функции, получаем равенство

$$\cdots+0.5(r_1-ir_2)y(t)+0.5(r_1+ir_2)y^*(t)+\cdots=0, \quad r_1^2+r_2^2>0.$$

Таким образом, нетривиальная линейная комбинация с комплексными коэффициентами для функций из исходной фундаментальной системы решений (3.32) обратилась в ноль, что противоречит ее линейной независимости.

Пример 3.4.2. *Составить линейное однородное дифференциальное уравнение наименьшего порядка с постоянными вещественными коэффициентами, у которого решениями являются функции*

$$y_1(t)=1, \quad y_2(t)=\sin(2t).$$

Для решения этой задачи представим функции в виде

$$y_1(t)=\exp\{0\cdot t\}, \quad y_2(t)=\mathrm{Im}\,\exp\{2it\}.$$

Так как уравнение имеет вещественные коэффициенты, то и функция $y_3(t)=\mathrm{Re}\,\exp\{2it\}$ также является его решением. Комплексная фундаментальная система решений состоит из функций

$$\exp\{0\cdot t\}, \quad \exp\{2it\}, \quad \exp\{-2it\},$$

порядок уравнения равен 3, корни его характеристического многочлена суть $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2i$, $\lambda_3=-2i$. По виду многочлена

$$M(\lambda)=\lambda(\lambda-2i)(\lambda+2i)=\lambda^3+4\lambda$$

восстанавливаем само дифференциальное уравнение

$$y'''+4y'=0.$$

3.5. Построение линейного дифференциального уравнения n-го порядка по его решениям

3.5.1. Построение линейного дифференциального уравнения по его решениям

В этом параграфе мы сначала рассмотрим вопрос о построении линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}(t)y'(t)+a_n(t)y(t)=0, \tag{3.35}$$

решением которого являются заданные функции. При этом возникают два вопроса, а именно: существует ли линейное дифференциальное уравнение, имеющее своими решениями заданные функции, и единственно ли такое уравнение. Начнем с исследования второго вопроса. Справедлива следующая теорема

Теорема 3.5.1. *Пусть коэффициенты $a_m(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $m=1,2,\ldots,n$. Тогда линейное однородное дифференциальное уравнение (3.35) однозначно определяется фундаментальной системой решений.*

Доказательство. Пусть $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (3.35). Предположим, что существует другое дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами $b_m(t)$, $m=1,2,\ldots,n$, для которого система $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$ $y_n(t)$ также является фундаментальной. Покажем, что в этом случае $a_m(t)=b_m(t)$, $t\in[a,b]$, $m=1,2,\ldots,n$.

Действительно, функции $y_k(t)$ являются решениями и того и другого уравнения, то есть

$$\begin{aligned}y_k^{(n)}(t)+a_1(t)y_k^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}(t)y_k'(t)+a_n(t)y_k(t)=0, \quad t\in[a,b],\\ y_k^{(n)}(t)+b_1(t)y_k^{(n-1)}(t)+\cdots+b_{n-1}(t)y_k'(t)+b_n(t)y_k(t)=0, \quad t\in[a,b],\end{aligned}$$

для $k=1,2,\ldots,n$. Вычитая для каждого k одно равенство из другого получим, что

$$(a_1(t)-b_1(t))y_k^{(n-1)}(t)+\cdots+(a_{n-1}(t)-b_{n-1}(t))y_k'(t)+(a_n(t)-b_n(t))y_k(t)=0,$$

для $t\in[a,b]$ и $k=1,2,\ldots,n$. Предположим, что существует точка $t_0\in(a,b)$ такая, что $a_1(t_0)\neq b_1(t_0)$. Тогда в силу непрерывности функций $a_1(t),b_1(t)$ существует такое $\varepsilon>0$, что

$$a_1(t)\neq b_1(t), \quad t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\subset[a,b].$$

Поделив на $a_1(t)-b_1(t)$ и обозначив $p_m(t)=\dfrac{a_m(t)-b_m(t)}{a_1(t)-b_1(t)}$, имеем

$$y_k^{(n-1)}(t)+p_2(t)y_k^{(n-2)}(t)+\cdots+p_{n-1}(t)y_k'(t)+p_n(t)y_k(t)=0,\ t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon],$$

для $k=1,2,\ldots,n$. Таким образом, мы получили, что n линейно независимых функций $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения $(n-1)$-го порядка с непрерывными коэффициентами $p_m(t)$. Но из теоремы об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения следует, что уравнение $(n-1)$-го порядка имеет только $n-1$ линейно независимое решение. Полученное противоречие доказывает, что $a_1(t)=b_1(t)$, $t\in[a,b]$. Доказательство равенства остальных функций проводится аналогично. Теорема 3.5.1 доказана. □

Рассмотрим теперь вопрос о существовании линейного дифференциального уравнения, решением которого являлась бы заданная система функций.

Теорема 3.5.2. *Пусть n раз непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ таковы, что составленный из них определитель Вронского $W[y_1,y_2,\ldots,y_n](t)$ не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a,b]$.*

Тогда существует линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка такое, что функции $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ являются его фундаментальной системой решений.

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка для неизвестной функции $y(t)$

$$\det\begin{pmatrix}
y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) & y(t)\\
y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) & y'(t)\\
y_1''(t) & y_2''(t) & \ldots & y_n''(t) & y''(t)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)}(t)\\
y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \ldots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)}(t)
\end{pmatrix}=0. \tag{3.36}$$

Для того, чтобы убедиться в том, что уравнение (3.36) действительно представляет собой линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, достаточно разложить определитель по последнему столбцу. Коэффициент при старшей производной $y^{(n)}(t)$ представляет собой определитель Вронского, составленный из заданных функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$ $y_n(t)$, и по условию теоремы отличен от нуля на $[a,b]$. Поделив на этот определитель, мы получим дифференциальное уравнение вида (3.35) с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами. Все функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$ $y_n(t)$ являются решениями полученного уравнения, так как при подстановке функции $y(t)=y_k(t)$ в уравнение (3.36) мы имеем слева определитель с двумя одинаковыми столбцами. Теорема 3.5.2 доказана. □

Пример 3.5.1. *Составить линейное однородное дифференциальное уравнение наименьшего порядка, у которого решениями являются функции*

$$y_1(t)=t, \quad y_2(t)=\exp\{t^2\}, \quad y_3(t)=t^2, \quad y_4(t)=3t-2t^2.$$

Для решения этой задачи прежде всего заметим, что

$$y_4(t)=3y_1(t)-2y_3(t),$$

а функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ и $y_3(t)$ имеют отличный от нуля определитель Вронского

$$\begin{aligned}W[y_1,y_2,y_3](t)=\det\begin{pmatrix}t & \exp\{t^2\} & t^2\\ 1 & 2t\exp\{t^2\} & 2t\\ 0 & 2\exp\{t^2\}+4t^2\exp\{t^2\} & 2\end{pmatrix}=\\=-2\exp\{t^2\}(2t^4-t^2+1)\neq 0,\ \forall t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Согласно теореме 3.5.2, искомое уравнение третьего порядка имеет вид

$$\det\begin{pmatrix}t & \exp\{t^2\} & t^2 & y\\ 1 & 2t\exp\{t^2\} & 2t & y'\\ 0 & (2+4t^2)\exp\{t^2\} & 2 & y''\\ 0 & (12t+8t^3)\exp\{t^2\} & 0 & y'''\end{pmatrix}\frac{1}{W[y_1,y_2,y_3](t)}=0.$$

Пример 3.5.2. *Составить на отрезке $[1,2]$ линейное однородное дифференциальное уравнение наименьшего порядка, у которого решениями являются функции*

$$y_1(t)=1, \quad y_2(t)=\cos(t), \quad y_3(t)=\sin^2(t/2).$$

Для решения этой задачи прежде всего заметим, что

$$y_3(t)=0.5(y_1(t)-y_2(t)),$$

а функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ имеют отличный от нуля определитель Вронского

$$W[y_1,y_2](t)=\det\begin{pmatrix}1 & \cos t\\ 0 & -\sin t\end{pmatrix}=-\sin t\neq 0, \quad \forall t\in[1,2].$$

Согласно теореме 3.5.2, искомое уравнение второго порядка имеет вид

$$\det\begin{pmatrix}1 & \cos t & y\\ 0 & -\sin t & y'\\ 0 & -\cos t & y''\end{pmatrix}\frac{1}{W[y_1,y_2](t)}=0, \quad \text{или} \quad y''-\mathrm{ctg}(t)\,y'=0.$$

3.5.2. Формула Остроградского-Лиувилля

Используя представление линейного дифференциального уравнения в виде (3.36), можно получить формулу для определителя Вронского. При выводе этой формулы мы используем следующее правило дифференцирования функциональных определителей.

Пусть $D(t)$ – определитель n-го порядка, элементами которого являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$. Производная $D'(t)$ определителя $D(t)$ равна сумме n определителей, каждый из которых получен из $D(t)$ путем замены одной из его строк на строку из производных.

Из этого правила следует простая формула для производной определителя Вронского $\Delta(t) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](t)$, составленного из системы n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$,

$$\Delta'(t) = \det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_{n-1}(t) & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_{n-1}'(t) & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(t) & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \ldots & y_{n-1}^{(n)}(t) & y_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Действительно, применим правило вычисления производной функционального определителя к определителю Вронского $\Delta(t)$. Все определители, в которых на производные заменяется любая строка, кроме последней, будут равны нулю, как определители, имеющие одинаковые строки. Следовательно, только последний определитель, в котором на производные заменена последняя строка, и представляет собой производную $\Delta'(t)$.

Пусть $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (3.35). Из теоремы 3.5.1 следует, что это уравнение однозначно определяется своей фундаментальной системой. Значит, поделив уравнение (3.36) на определитель Вронского $\Delta(t)$, мы получим уравнение (3.35). Тогда из записи уравнения (3.36) следует, что коэффициент

$$a_1(t) = -\frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)}.$$

Интегрируя от t_0 до t, получим формулу Остроградского-Лиувилля

$$\Delta(t) = \Delta(t_0)\exp\Big\{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau\Big\}, \quad t \in [a,b].$$

Следствие 3.5.1. *Если коэффициент $a_1(t) = 0$, $t \in [a,b]$, то определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](t)$ постоянен на отрезке $[a,b]$.*

Глава 4

Общая теория линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1. Линейные системы дифференциальных уравнений и матричные дифференциальные уравнения

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в векторной форме с непрерывными на отрезке $[a,b]$ действительными коэффициентами $a_{i,j}(t)$ и непрерывными комплекснозначными $f_k(t)$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad t \in [a,b], \tag{4.1}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что решение $\overline{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^\top$ системы (4.1) является, вообще говоря, комплекснозначной вектор-функцией $\overline{y}(t) = \overline{u}(t) + i\overline{v}(t)$, где

$$\overline{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^\top, \quad \overline{v}(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))^\top,$$

а $u_j(t)$, $v_j(t)$ действительны, $j = 1, \ldots, n$, В дальнейшем, если не оговорено особо, речь пойдет именно о комплекснозначных решениях.

4.1.1. Линейные однородные системы

Определение 4.1.1. *Система (4.1) называется однородной, если $\overline{f}(t) \equiv \overline{\theta}$ на отрезке $[a,b]$. В противном случае система (4.1) называется неоднородной.*

Здесь и далее $\overline{\theta} = (0, \ldots, 0)^\top$ обозначает нулевой вектор-столбец соответствующей размерности.

Лемма 4.1.1. *Если $\overline{y}(t)$ – решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений, то $\alpha\overline{y}(t)$ также решение однородной системы для любого $\alpha \in \mathbb{C}$. Если $\overline{y}_1(t)$ и $\overline{y}_2(t)$ – два решения линейной однородной системы, то $\overline{y}(t) = \overline{y}_1(t) + \overline{y}_2(t)$ также решение однородной системы.*

Доказательство. Если $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$, то

$$\frac{d\{\alpha\overline{y}(t)\}}{dt} = \alpha\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \alpha A(t)\overline{y}(t) = A(t)\{\alpha\overline{y}(t)\}.$$

Если $d\overline{y}_\ell(t)/dt = A(t)\overline{y}_\ell(t)$, $\ell = 1, 2$, то

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \frac{d\{\overline{y}_1(t) + \overline{y}_1(t)\}}{dt} = \frac{d\overline{y}_1(t)}{dt} + \frac{d\overline{y}_1(t)}{dt} = = A(t)\overline{y}_1(t) + A(t)\overline{y}_2(t) = A(t)\overline{y}(t).$$

□

Следствие 4.1.1. *Если $\overline{y}_\ell(t)$ – решения линейной однородной системы $\ell = 1, \ldots, m$, то $\overline{y}(t) = \sum\limits_{\ell=1}^{m} \alpha_\ell\overline{y}_\ell(t)$ также решение однородной системы для любых $\alpha_\ell \in \mathbb{C}$.*

4.1.2. Однородные матричные дифференциальные уравнения

Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными на отрезке $[a,b]$ действительными коэффициентами $a_{i,j}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad t \in [a,b], \tag{4.2}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть имеется n вектор-функций

$$\overline{y}_j(t) = (y_{1j}(t), \ldots, y_{nj}(t))^\top, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Составим матрицу $Y(t)$, столбцами которой являются данные вектор-функции:

$$Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Сопоставим системе (4.2) матричное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \tag{4.4}$$

где производная матричной функции равна матрице, состоящей из производных элементов исходной матрицы, то есть $dY(t)/dt = \big(dy_{ij}(t)/dt\big)$.

По определению, решением матричного дифференциального уравнения (4.4) на отрезке $[a,b]$ называется непрерывно дифференцируемая на данном отрезке матричная функция вида (4.3), обращающая уравнение (4.4) в тождество. Уравнение (4.4) имеет по сравнению с системой (4.2) более симметричную форму записи, напоминающую скалярное уравнение первого порядка: и "коэффициент" $A(t)$ уравнения и искомая функция $Y(t)$ являются объектами одинаковой природы – матричными функциями. Связь между решениями системы (4.2) и матричным уравнением (4.4) устанавливает следующая теорема.

Теорема 4.1.1. *Вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ являются решениями однородной системы (4.2) на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда составленная из этих функций матрица $Y(t)$ вида (4.3) является решением матричного дифференциального уравнения (4.4).*

Доказательство. Для доказательства необходимости рассмотрим решения $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ системы (4.2) и составим из них матрицу $Y(t)$ вида (4.3). Поскольку

$$\frac{d\overline{y}_j(t)}{dt} = A(t)\overline{y}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$

то для соответствующей матричной производной, элементы которой сгруппированы по столбцам, получаем равенства

$$\frac{dY(t)}{dt} = \left(\frac{d\overline{y}_1(t)}{dt}, \frac{d\overline{y}_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\overline{y}_n(t)}{dt}\right) = = (A\overline{y}_1(t), A\overline{y}_2(t), \ldots, A\overline{y}_n(t)) = A(t)Y(t).$$

То есть выполнено матричное уравнение (4.4). Аналогично, расписывая матричное уравнение (4.4) по столбцам, доказывается достаточность. □

Теорема 4.1.2. *Пусть матричная функция $Y(t)$ является решением матричного уравнения (4.4). Тогда:*

1. *для любого вектора констант $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$, $c_j \in \mathbb{C}$, вектор-функция $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}$ удовлетворяет системе (4.2);*
2. *для любой матрицы констант $B = \big(b_{i,j}\big)$, $b_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \ldots, n$, матричная функция $X(t) = Y(t)B$ удовлетворяет уравнению (4.4).*

Доказательство. 1. Если матричная функция

$$Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$$

является решением уравнения (4.4), то по теореме 4.1.1 вектор-столбцы $\overline{y}_j(t)$ являются решениями системы (4.2), также как и их линейная комбинация

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c} = \sum_{j=1}^{n} c_j\overline{y}_j(t).$$

2. В силу линейности операции дифференцирования и ассоциативности операции произведения матриц, имеем:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\{Y(t)B\} = \frac{dY(t)}{dt}\cdot B = = \{A(t)Y(t)\}B = A(t)\{Y(t)B\} = A(t)X(t).$$

□

4.2. Линейная зависимость вектор-функций и определитель Вронского

4.2.1. Линейная зависимость произвольных вектор-функций

В этом параграфе рассматриваются произвольные комплекснозначные вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$, определенные на отрезке $[a,b]$, то есть $\overline{y}_j(t) = (y_{j1}(t), \ldots, y_{jm}(t))^\top$, $j = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$. Никакая связь с решениями дифференциальных уравнений и даже непрерывность этих функций пока не предполагаются.

Определение 4.2.1. *Вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a,b]$, если найдутся комплексные константы $c_1, c_2, \ldots, c_m$, $\sum\limits_{j=1}^{m}|c_j| > 0$ такие, что*

$$c_1\overline{y}_1(t) + c_2\overline{y}_2(t) + \cdots + c_m\overline{y}_m(t) = \overline{\theta}, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{4.5}$$

Если же равенство (4.5) выполнено только для тривиального вектора констант, $\overline{c} = (0, \ldots, 0)^\top$, то вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a,b]$.

Эквивалентная (4.5) векторная форма записи условия линейной зависимости состоит в том, что для матричной функции $Y(t)$ порядка $m \times m$ выполнено равенство

$$Y(t)\overline{c} = \overline{\theta}, \quad \forall t \in [a,b] \tag{4.6}$$

хотя бы для одного ненулевого вектора констант $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)^\top$.

Замечание 4.2.1. *Если рассматриваемые вектор-функции принимают только вещественные значения, то в определениях линейной зависимости и независимости достаточно рассматривать лишь действительные коэффициенты c_j, $j = 1, \ldots, m$.*

Определение 4.2.2. *Определителем Вронского системы заданных на отрезке $[a,b]$ вектор функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называется зависящий от переменной $t \in [a,b]$ определитель матричной функции $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t))$:*

$$\Delta(t) = \det Y(t).$$

Необходимое условие линейной зависимости вектор-функций устанавливает следующая теорема.

Теорема 4.2.1. *Если система вектор функций $\overline{y}_1(t)$, $\overline{y}_2(t)$, … $\overline{y}_m(t)$ является линейно зависимой на отрезке $[a,b]$, то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этом отрезке:*

$$\Delta(t) = 0, \quad \forall t \in [a,b].$$

Доказательство. Из условия линейной зависимости (4.6) вытекает существование такого ненулевого вектора $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)^\top$, что для произвольного фиксированного $t_0 \in [a,b]$ справедливо равенство

$$Y(t_0)\overline{c} = \overline{\theta}. \tag{4.7}$$

Равенство (4.7) означает, что однородная система линейных алгебраических уравнений с числовой матрицей $Y(t_0)$ имеет нетривиальное решение $\overline{c}$. По известной теореме алгебры это возможно только для вырожденной матрицы, то есть $\det Y(t_0) = 0$. □

Отметим, что к утверждению теоремы нетрудно было бы прийти и на основе определения (4.5), которое означает линейную зависимость столбцов матрицы $Y(t)$ для любого $t \in [a,b]$.

Без дополнительных предположений относительно вектор-функций равенство нулю определителя Вронского является, вообще говоря, только лишь необходимым условием линейной зависимости. Из равенства нулю определителя Вронского системы вектор-функций не вытекает их линейная зависимость.

Пример 4.2.1. *Для $m = 2$ рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ две вектор-функции, имеющие нулевой определитель Вронского:*

$$\overline{y}_1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \ \overline{y}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2|t| \\ t|t| \end{pmatrix}, \ Y(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^2|t| \\ t^2 & t|t| \end{pmatrix}, \ \Delta(t) = \det Y(t) \equiv 0.$$

Эти вектор-функции являются линейно независимыми на рассматриваемом отрезке. Действительно, если для некоторого вектора $\overline{c} = (c_1, c_2)^\top$ справедливо равенство $Y(t)\overline{c} = \overline{\theta}$ в каждой точке отрезка $[-1,1]$, то при $t = 1$ должно выполняться равенство $c_1 + c_2 = 0$, а при $t = -1$ – равенство $c_1 - c_2 = 0$, откуда $c_1 = c_2 = 0$.

4.2.2. Линейная зависимость и независимость решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему из n-мерных вектор-функций $\overline{y}_1(t)$, $\overline{y}_2(t)$, … $\overline{y}_n(t)$, являющихся решением линейной однородной системы дифференциальных уравнений (4.2), $Y(t)$ – соответствующая матричная функция из (4.3). Подчеркнем, что количество вектор-функций совпадает с порядком системы. Исследуем вопрос о связи свойства линейной зависимости решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений и значения определителя Вронского.

Теорема 4.2.2. *Пусть $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ – система вектор-функций решений линейной однородной системы (4.2) на отрезке $[a,b]$. Если найдется точка $t_0 \in [a,b]$, для которой*

$$\det Y(t_0) = 0,$$

то система вектор-функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ линейно зависима на отрезке $[a,b]$ и

$$\det Y(t) = 0, \quad \forall t \in [a,b].$$

Доказательство. Однородная система линейных алгебраических уравнений относительно вектора $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_n)^\top$

$$Y(t_0)\overline{c} = \overline{\theta} \tag{4.8}$$

имеет ненулевое решение $\overline{c}^0 = (c_1^0, \ldots, c_n^0)^\top$ в силу вырожденности числовой матрицы $Y(t_0)$, имеющей нулевой определитель.

Положим $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}^0$. Ясно, что $\overline{y}(t)$ – решение однородной системы (4.2) в силу первой части теоремы 4.1.2 и, кроме того, $\overline{y}(t_0) = \overline{\theta}$ в силу (4.8). Таким образом, построенная функция является решением задачи Коши с нулевым начальным условием при $t = t_0$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad \overline{y}(t_0) = \overline{\theta}.$$

Эта задача Коши по теореме существования и единственности 2.1.2 имеет на рассматриваемом отрезке только одно решение – нулевое. Поэтому

$$\overline{\theta} = \overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}^0 = c_1^0\overline{y}_1(t) + c_2^0\overline{y}_2(t) + \cdots + c_n^0\overline{y}_n(t), \quad \forall t \in [a,b],$$

и рассматриваемая система вектор-функций является линейно зависимой на отрезке $[a,b]$. Тогда в силу теоремы 4.2.1 имеем $\det Y(t) = 0$, $\forall t \in [a,b]$. □

Из теорем 4.2.1 и 4.2.2 вытекает следующая теорема об альтернативе для определителя Вронского системы вектор-функций решений линейной однородной системы.

Теорема 4.2.3. *Определитель Вронского для вектор-функций $\overline{y}_1(t)$, $\overline{y}_2(t)$, …, $\overline{y}_n(t)$, являющихся решениями линейной однородной системы дифференциальных уравнений (4.2) на отрезке $[a,b]$, либо тождественно равен нулю, $\det Y(t) \equiv 0$ (и система вектор-функций линейно зависима), либо не обращается в ноль ни в одной точке, $\det Y(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$ (и система вектор-функций линейно независима).*

Замечание 4.2.2. *Согласно теореме 4.2.3, система вектор-функций*

$$\overline{y}_1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \overline{y}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2|t| \\ t|t| \end{pmatrix}$$

из примера 4.2.1 не может являться решением никакой однородной системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с непрерывными на отрезке $[-1,1]$ коэффициентами.

4.3. Фундаментальная система решений и общее решение линейной системы

4.3.1. Фундаментальная система решений линейной однородной системы

Определение 4.3.1. ***Фундаментальной системой решений*** *линейной однородной системы дифференциальных уравнений $\dfrac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t)$ порядка n на отрезке $[a,b]$ называется совокупность n линейно независимых решений $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ этой системы. Соответствующая этим решениям функциональная матрица*

$$Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$$

*называется **фундаментальной матрицей**.*

В силу теоремы (4.1.2) фундаментальная матрица является решением матричного дифференциального уравнения (4.4), а в силу теоремы (4.2.3) она имеет на отрезке $[a,b]$ отличный от нуля определитель, $\det Y(t) \neq 0$.

Теорема 4.3.1. *Для любой однородной системы линейных дифференциальных уравнений вида (4.2) с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами существует фундаментальная система решений.*

Доказательство. Зафиксируем любое $t_0 \in [a,b]$ и рассмотрим задачу Коши для матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = E, \tag{4.9}$$

где E – единичная матрица. Расписывая матричные равенства по столбцам, заключаем, что задача (4.9) эквивалентна совокупности из n задач Коши

$$\frac{d\overline{y}_j(t)}{dt} = A(t)\overline{y}_j(t), \quad \overline{y}_j(t_0) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, 0)^\top, \quad j = 1, \ldots, n,$$

отличающихся лишь начальными данными. Существование на всем отрезке $[a,b]$ решений $\overline{y}_j(t)$ этих задач Коши, а значит и решения $Y(t)$ матричной задачи (4.9), вытекает из теоремы 2.1.2. Поскольку определитель матричной функции $Y(t)$ в силу (4.9) равен 1, $\det Y(t_0) = \det E = 1$, то линейная независимость на рассматриваемом отрезке построенной системы решений $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ есть следствие теоремы 4.2.3 об альтернативе для определителя Вронского. Таким образом, $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ – фундаментальная система решений, а $Y(t)$ – фундаментальная матрица. □

Замечание 4.3.1. *Фундаментальная матрица неединственна. Полагая в задаче Коши (4.9) начальное условие $Y(t_0) = B$, $\det B \neq 0$, мы получим другую фундаментальную матрицу.*

Замечание 4.3.2. *Так как элементы $a_{ij}(t)$ матрицы системы вещественны, то и фундаментальная матрица может быть выбрана вещественной.*

4.3.2. Общее решение линейной однородной системы

Определение 4.3.2. *Общим решением линейной однородной системы дифференциальных уравнений n-го порядка называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение системы может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 4.3.2. *Пусть $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$ – фундаментальная матрица для линейной однородной системы*

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t)$$

на отрезке $[a,b]$. Тогда ее общее решение представимо в виде

$$\overline{y}_{OO}(t) = c_1\overline{y}_1(t) + c_2\overline{y}_2(t) + \cdots + c_n\overline{y}_n(t) = Y(t)\overline{c}, \tag{4.10}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные, $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Доказательство. По теореме 4.1.2 вектор-функция $Y(t)\overline{c}$ является решением однородной системы для любых $\overline{c} \in \mathbb{C}^n$. Согласно определению общего решения осталось показать, что для любого наперед заданного решения $\overline{y}(t)$ линейной однородной системы найдется вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ такой, что на отрезке $[a,b]$ выполнено равенство

$$\overline{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}. \tag{4.11}$$

Для построения $\widetilde{c}$ зафиксируем произвольное $t_0 \in [a,b]$ и вычислим $\overline{y}^0 = \overline{y}(t_0)$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n)^\top$:

$$Y(t_0)\widetilde{c} = \overline{y}^0. \tag{4.12}$$

В силу невырожденности матрицы $Y(t_0)$ с определителем $\det Y(t_0) \neq 0$ эта система имеет единственное решение $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n)^\top$. Тогда функции $\widetilde{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}$ и $\overline{y}(t)$ являются решениями одной и той же задачи Коши

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad \overline{y}(t_0) = \overline{y}^0, \tag{4.13}$$

и по теореме единственности обязаны совпадать, что доказывает (4.11). Отметим, что для фиксированного решения $\overline{y}(t)$ вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ в представлении (4.11) определен однозначно. □

Следствие 4.3.1. *В ходе доказательства теоремы 4.3.2 была фактически выведена формула для решения задачи Коши (4.13) с произвольным начальным вектором $\overline{y}^0$. Действительно, из (4.12) имеем $\widetilde{c} = Y^{-1}(t_0)\overline{y}^0$ и после использования (4.11) получаем*

$$\overline{y}(t) = Z(t,t_0)\overline{y}^0, \quad Z(t,t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0). \tag{4.14}$$

*Функциональная матрица $Z(t,t_0)$ называется **матрицантом**. Как матричная функция переменной t она является решением следующей задачи Коши*

$$\frac{dZ(t,t_0)}{dt} = A(t)Z(t,t_0), \quad Z(t_0,t_0) = Y(t_0)Y^{-1}(t_0) = E.$$

Замечание 4.3.3. *Так как элементы $a_{ij}(t)$ матрицы системы вещественны, то и общее решение естественно искать в классе вещественнозначных функций. Тогда при выборе вещественной фундаментальной матрицы (это всегда возможно в рассматриваемом случае) формула (4.10) при $\overline{c} \in \mathbb{R}^n$ дает общее вещественнозначное решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений.*

4.3.3. Общее решение линейной неоднородной системы, метод вариации постоянных

Рассмотрим линейную неоднородную систему с непрерывным вектором $\overline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^\top$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad t \in [a,b]. \tag{4.15}$$

Как и в предыдущем пункте, $Y(t)$ обозначает фундаментальную матрицу соответствующей (4.15) однородной системы $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$ с той же самой матрицей коэффициентов $A(t)$.

Определение 4.3.3. *Общим решением линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений n-го порядка (4.15) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этой системы такое, что любое другое решение системы (4.15) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 4.3.3. *Общее решение $\overline{y}_{OH}(t)$ линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений (4.15) представимо в виде*

$$\overline{y}_{OH}(t) = Y(t)\overline{c} + \overline{y}_H(t), \quad \forall\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top \in \mathbb{C}^n, \tag{4.16}$$

где $\overline{y}_H(t)$ – некоторое (частное) решение неоднородной системы (4.15).

Доказательство. В силу линейности системы (4.15) вектор-функция $\overline{y}_{OH}(t)$ является решением (4.15) для любого вектора констант $\overline{c} \in \mathbb{C}^n$. Согласно определению общего решения, осталось показать, что для любого наперед заданного решения $\widetilde{y}(t)$ системы (4.15) найдется вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ такой, что на отрезке $[a,b]$ будет выполнено равенство

$$\widetilde{y}(t) = Y(t)\widetilde{c} + \overline{y}_H(t). \tag{4.17}$$

Пусть $\widetilde{y}(t)$ – решение (4.15). Разность $\overline{y}(t) = \widetilde{y}(t) - \overline{y}_H(t)$ двух решений неоднородной системы является решением однородной системы, $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$. Тогда по теореме 4.3.2 об общем решении линейной однородной системы найдется такой вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство $\overline{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}$, которое приводит к (4.17). □

Построение одного из частных решений неоднородной системы может быть проведено методом вариации постоянных и выражено с помощью введенного в (4.14) матрицанта $Z(t,\tau)$.

Теорема 4.3.4. *Для любого $t_0 \in [a,b]$ формула*

$$\overline{y}_H(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(t)d\tau, \quad t \in [a,b], \tag{4.18}$$

задает частное решение неоднородной системы (4.15), удовлетворяющее условию $\overline{y}_H(t_0) = 0$.

Доказательство. Воспользуемся методом вариации постоянных, согласно которому частное решение неоднородной системы ищется в виде, повторяющем структуру (4.10) общего решения однородной системы, в котором вектор констант $\overline{c}$ заменен на пока произвольную непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\overline{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t))^\top$, а именно:

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}(t). \tag{4.19}$$

Поскольку фундаментальная матрица удовлетворяет однородному уравнению $dY(t)/dt = A(t)Y(t)$, то

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt}\overline{c}(t) + Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt} = A(t)Y(t)\overline{c}(t) + Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt}. \tag{4.20}$$

Подставляя выражения (4.19) и (4.20) в уравнение (4.15), получаем уравнение для определения вектор-функции $\overline{c}(t)$:

$$Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt} = \overline{f}(t). \tag{4.21}$$

В силу невырожденности фундаментальной матрицы это уравнение можно переписать в виде $d\overline{c}(t)/dt = Y^{-1}(t)\overline{f}(t)$ и проинтегрировать от t_0 до t. Полагая по определению, что интеграл от вектор-функции есть вектор, составленный из интегралов координатных функций, имеем

$$\overline{c}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\overline{f}(\tau)d\tau.$$

После подстановки в (4.19) окончательно получаем

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}(t) = Y(t)\int\limits_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\overline{f}(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau.$$

□

Следствие 4.3.2. *Решение $\overline{y}(t) = \overline{y}(t;\overline{y}_0)$ задачи Коши для линейной неоднородной системы*

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad t \in [a,b]$$

с заданным в точке $t_0 \in [a,b]$ начальным условием

$$\overline{y}(t_0) = \overline{y}_0$$

имеет вид

$$\overline{y}(t;\overline{y}_0) = Z(t,t_0)\overline{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau. \tag{4.22}$$

4.4. Построение фундаментальной системы решений для линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей

Рассмотрим однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов $A(t) \equiv A = (a_{i,j})$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A\overline{y}(t). \tag{4.23}$$

По аналогии со скалярным уравнением $y'(t) = ay(t)$, которое имеет решение $y(t) = h\exp\{at\}$ для любого $h \in \mathbb{C}$, будем искать нетривиальные решения системы (4.23) в виде

$$\overline{y}(t) = \overline{h}\exp\{\lambda t\}, \quad \overline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)^\top \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.24}$$

Подстановка вектор-функции (4.24) в систему (4.23) приводит к задаче нахождения таких $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых система линейных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda E)\overline{h} = \overline{\theta} \tag{4.25}$$

имеет нетривиальное решение $\overline{h}$. Как известно из курса линейной алгебры, такие λ называются *собственными значениями* матрицы A, а отвечающие им векторы $\overline{h}$ – *собственными векторами* матрицы A. Собственные значения и только они являются корнями *характеристического многочлена* $M(\lambda)$:

$$M(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0. \tag{4.26}$$

4.4.1. Построение фундаментальной системы решений, когда существует базис из собственных векторов

Поскольку характеристический многочлен имеет степень n, то по основной теореме алгебры у него имеется ровно n корней (собственных значений), с учетом их кратности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Из курса линейной алгебры известно, что существует не более, чем n линейно независимых собственных векторов матрицы A. Остановимся сначала на случае, когда количество линейно независимых собственных векторов в точности равно n. Заметим, что в этом случае собственные векторы составляют базис пространства $\mathbb{C}^n$.

Теорема 4.4.1. *Пусть у матрицы A имеется ровно n линейно независимых собственных векторов*

$$\overline{h}_1, \quad \overline{h}_2, \quad \ldots, \quad \overline{h}_n,$$

отвечающих соответствующим собственным значениям

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n.$$

Тогда вектор-функции

$$\overline{y}_1(t) = \overline{h}_1 \exp\{\lambda_1 t\}, \overline{y}_2(t) = \overline{h}_2 \exp\{\lambda_2 t\}, \dots \overline{y}_n(t) = \overline{h}_n \exp\{\lambda_n t\} \quad (4.27)$$

образуют фундаментальную систему решений (4.23) на произвольном отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $[a, b]$. Для любого $j = 1, \dots, n$ собственное значение λ_j и соответствующий собственный вектор $\overline{h}_j$ удовлетворяют уравнению (4.25), и тогда каждая из вектор-функций $\overline{y}_j(t) = \overline{h}_j \exp\{\lambda_j t\}$ является решением системы (4.23) на $[a, b]$ по построению.

Докажем линейную независимость на отрезке $[a, b]$ построенной системы функций. Для этого, согласно теореме 4.2.3 об альтернативе для определителя Вронского, достаточно убедиться, что $\det Y(t) \neq 0$ для некоторого $t \in [a, b]$, где $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t))$. Рассмотрим отрезок $[c, d]$, включающий в себя исходный отрезок $[a, b]$ и точку $t = 0$:

$$[a, b] \subseteq [c, d], \quad 0 \in [c, d].$$

Вектор-функции из (4.27) являются решениями системы (4.23) на отрезке $[c, d]$. В принадлежащей этому отрезку точке $t = 0$ определитель Вронского

$$\det Y(0) = \det(\overline{h}_1, \overline{h}_2, \dots, \overline{h}_n) \neq 0,$$

так как в противном случае составляющие $Y(0)$ столбцы – собственные векторы $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \dots, \overline{h}_n$ – были бы линейно зависимыми. Согласно теореме 4.2.3 об альтернативе для определителя Вронского $\det Y(t) \neq 0$ на всем отрезке $[c, d]$, а значит и на его части $[a, b]$. □

4.4.2. Построение фундаментальной системы решений, когда не существует базиса из собственных векторов

Рассмотрим случай, когда количество существующих у матрицы A линейно независимых собственных векторов строго меньше, чем порядок системы n. Выпишем все попарно различные собственные значения λ_j с соответствующими кратностями k_j:

$$\begin{array}{llllll} \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_\ell & , & \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j, \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_\ell & , & k_j \geqslant 1, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_\ell = n. \end{array}$$

Пусть далее $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ обозначает одно из собственных значений с соответствующей кратностью k. Покажем, что каждому такому собственному значению можно сопоставить ровно k вектор-функций, являющихся решениями однородной системы (4.23). Если размерность $s = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ собственного подпространства, определяющая количество линейно независимых собственных векторов для данного собственного значения, равна кратности собственного значения, $s = k$, то искомые функции строятся согласно (4.27).

Если размерность собственного подпространства меньше кратности собственного значения, $s < k$, то, как известно из курса линейной алгебры, можно выбрать собственные векторы $\overline{h}_1^1$, $\overline{h}_2^1$, ..., $\overline{h}_s^1$ так, что состоящая ровно из k векторов система собственных векторов $\overline{h}_j^1$ и присоединенных векторов $\overline{h}_j^m$, $m = 2, \dots, p_j$, $j = 1, \dots, s$, $p_j \geqslant 1$, $p_1 + p_2 + \dots + p_s = k$, которую запишем в виде

$$\begin{array}{ccccc} \overline{h}_1^1, & \dots & \overline{h}_j^1, & \dots & \overline{h}_s^1, \\ \overline{h}_1^2, & \dots & \overline{h}_j^2, & \dots & \overline{h}_s^2, \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{h}_1^{p_1}, & \dots & \overline{h}_j^{p_j}, & \dots & \overline{h}_s^{p_s}, \end{array}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\begin{array}{rcl} A\overline{h}_j^1 & = & \lambda \overline{h}_j^1, \\ A\overline{h}_j^2 & = & \lambda \overline{h}_j^2 + \overline{h}_j^1, \\ & \dots & \\ A\overline{h}_j^m & = & \lambda \overline{h}_j^m + \overline{h}_j^{m-1}, \\ & \dots & \\ A\overline{h}_j^{p_j} & = & \lambda \overline{h}_j^{p_j} + \overline{h}_j^{p_j - 1}. \end{array} \tag{4.28}$$

С помощью собственных и присоединенных векторов построим семейство из следующих k функций

$$\begin{array}{rcl} \overline{y}_j^1(t) & = & \overline{h}_j^1 \exp\{\lambda t\}, \\ \overline{y}_j^2(t) & = & \left(\overline{h}_j^2 + \dfrac{t}{1!}\overline{h}_j^1\right) \exp\{\lambda t\}, \end{array} \tag{4.29}$$

$$\vdots$$

$$\overline{y}_j^m(t) = \Big(\overline{h}_j^m + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{m-2} + \dots + \frac{t^q}{q!}\overline{h}_j^{m-q} + \dots$$
$$\dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\overline{h}_j^1\Big) \exp\{\lambda t\},$$

$$\vdots$$

$$\overline{y}_j^{p_j}(t) = \Big(\overline{h}_j^{p_j} + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{p_j-1} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{p_j-2} + \dots + \frac{t^q}{q!}\overline{h}_j^{p_j-q} + \dots$$
$$\dots + \frac{t^{p_j-1}}{(p_j-1)!}\overline{h}_j^1\Big) \exp\{\lambda t\},$$
$$j = 1, \dots, s.$$

Докажем, что все функции из построенного семейства являются решениями линейной однородной системы (4.23). Рассмотрим функцию $\overline{y}_j^m(t)$, вычислим ее производную $d\overline{y}_j^m(t)/dt$ и сгруппируем результат так, чтобы удобно было воспользоваться соотношениями (4.28). Имеем

$$\frac{d\overline{y}_j^m(t)}{dt} =$$
$$= \Big(\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{m-2} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{m-3} + \dots + \frac{t^q}{q!}\overline{h}_j^{m-q-1} + \dots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\overline{h}_j^1 +$$
$$+ \lambda\overline{h}_j^m + \frac{t}{1!}\lambda\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!}\lambda\overline{h}_j^{m-2} + \dots + \frac{t^q}{q!}\lambda\overline{h}_j^{m-q} + \dots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\lambda\overline{h}_j^2 +$$
$$+ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\lambda\overline{h}_j^1\Big) \exp\{\lambda t\} =$$
$$= \Big(A\overline{h}_j^m + \frac{t}{1!}A\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!}A\overline{h}_j^{m-2} + \dots + \frac{t^q}{q!}A\overline{h}_j^{m-q} + \dots$$
$$\dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}A\overline{h}_j^1\Big) \exp\{\lambda t\} = A\overline{y}_j^m(t),$$
$$m = 1, \dots, p_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

Следовательно, $\overline{y}_j^m(t)$ – решения системы (4.23).

Докажем, что система из n вектор-функций, состоящая из объединения построенных для всех $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ решений вида (4.29), является линейно независимой на произвольном отрезке $[a, b]$. Рассмотрим отрезок $[c, d]$, $[a, b] \subseteq [c, d]$, $0 \in [c, d]$. Вектор-функции из (4.29) являются решениями системы (4.23) на отрезке $[c, d]$. В принадлежащей этому отрезку точке $t = 0$ определитель Вронского этой системы отличен от нуля, поскольку соответствующая матрица $Y(0)$ составлена из столбцов, являющихся собственными и присоединенными векторами матрицы A, совокупность которых линейно независима и образует базис в $\mathbb{C}^n$. Согласно теореме 4.2.3 об альтернативе для определителя Вронского, $\det Y(t) \neq 0$ на всем отрезке $[c, d]$, а значит и на его части $[a, b]$. Поэтому рассматриваемая система решений (4.23) является линейно независимой на $[a, b]$ и, следовательно, составляет фундаментальную систему решений на этом отрезке. Тем самым установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 4.4.2. *Система из n вектор-функций, состоящая из объединения построенных для всех различных собственных значений λ_1, λ_2, … λ_ℓ решений вида (4.29), является фундаментальной системой решений (4.23) на произвольном отрезке* $[a, b]$.

4.4.3. Построение фундаментальной системы решений в вещественном виде

В предыдущем параграфе при построении фундаментальной системы решений мы фактически не использовали то, что матрица системы вещественна. При этом фундаментальная система решений конструктивно построена в комплексной форме. Однако общая теорема 4.3.1 из параграфа 4.3.1 гарантирует существование фундаментальной системы решений в вещественном виде. Возникает вопрос, нельзя ли также конструктивно построить фундаментальную систему решений в вещественном виде? Ответ на этот вопрос положительный. Ниже даны пояснения.

Напомним, что у вещественной матрицы характеристический многочлен имеет вещественные коэффициенты. Как следует из курса линейной алгебры, его комплекснозначные корни (собственные значения матрицы системы) идут комплексно сопряженными парами: $\lambda = p + iq$, $\lambda^* = p - iq$, $M(\lambda) = 0$, $M(\lambda^*) = 0$. Тогда в построенной в теореме 4.4.2 фундаментальной системе решений вектор-функции, отвечающие вещественным собственным значениям, являются вещественными, а отвечающие комплексным собственным значениям функции встречаются только комплексно сопряженными парами. Заменим в фундаментальной системе решений каждую такую пару функций

$$\overline{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^\top, \quad \overline{y}^*(t) = (y_1^*(t), \dots, y_n^*(t))^\top$$

соответствующими действительными и мнимыми частями,

$$\overline{y}^R(t) = \operatorname{Re} \overline{y}(t), \quad \overline{y}^I(t) = \operatorname{Im} \overline{y}(t).$$

Так как

$$\overline{y}^R(t) = 0.5(\overline{y}(t) + \overline{y}^*(t)), \quad \overline{y}^I(t) = 0.5i(\overline{y}^*(t) - \overline{y}(t)), \tag{4.30}$$

то $\overline{y}^R(t)$, $\overline{y}^I(t)$ – решения однородной системы как линейные комбинации решений. Построенная таким образом совокупность вектор-функций состоит из n *вещественных* решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений и задает ее фундаментальную систему решений.

Для обоснования этого факта осталось убедиться в линейной независимости над полем вещественных чисел построенной системы на любом отрезке $[a, b]$. Предположим противное, то есть некоторая линейная комбинация с вещественными коэффициентами $r_j \in \mathbb{R}$ для построенных функций обращается в ноль на некотором отрезке $[a, b]$. Не ограничивая общности можно считать, что в такой линейной комбинации встречается сумма вида

$$\dots + r_1\overline{y}^R(t) + r_2\overline{y}^I(t) + \dots = 0, \quad r_1^2 + r_2^2 > 0.$$

Подставляя из (4.30) выражения для всех встречающихся пар через соответствующие комплексные вектор-функции, получаем равенство

$$\dots + 0.5(r_1 - ir_2)\overline{y}(t) + 0.5(r_1 + ir_2)\overline{y}^*(t) + \dots = 0, \quad r_1^2 + r_2^2 > 0.$$

Таким образом, нетривиальная линейная комбинация с комплексными коэффициентами для вектор-функций из исходной фундаментальной системы решений обратилась в ноль, что противоречит ее линейной независимости.